Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Vorlesung 28

Der historische Ursprung der quadratischen Zahlbereiche wue auch der Klassengruppe liegt in der besonders von Gauß entwickelten Theorie der quadratischen Formen. In der ersten Vorlesung haben wir gefragt, welche Zahlen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar sind, also von der Form x^2+y^2 sind, und dies haben wir im weiteren Verlauf mit der Norm im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ in Verbindung gebracht. Einen ähnlichen Zusammenhang gibt es zu jeder binären quadratischen Form.

Binäre quadratische Formen

Definition 28.1. Unter einer *binären quadratischen Form* versteht man einen Ausdruck der Gestalt

$$aX^2+bXY+cY^2$$

mit $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Die a,b,c heißen die Koeffizienten der quadratischen Form. Wir fassen eine binäre quadratische Form F als eine Abbildung

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z},\, (x,y) \longmapsto ax^2+bxy+cy^2,$$

auf. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

heißt die *Gramsche Matrix* zur Form F. Mit ihr kann man

$$F(x,y) \,=\, (x,\, y) \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

schreiben.

Definition 28.2. Zu einer binären quadratischen Form

$$aX^2+bXY+cY^2$$

nennt man

$$b^2-4ac$$

die *Diskriminante* der Form.

Die Diskriminante kann man auch als $-1\frac{1}{4}$ der Determinante von $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ ansehen. Wir werden diese Diskriminante bald mit der Diskriminante eines quadratischen Zahlbereiches in Verbindung bringen.

DEFINITION 28.3. Man sagt, dass eine ganze Zahl n durch eine binäre quadratische Form

$$aX^2 + bXY + cY^2$$

darstellbar ist, wenn es ganze Zahlen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit

$$n = ax^2 + bxy + cy^2$$

gibt.

Die Zahlen $a, c, a + b + c$ sind unmittelbar darstellbar. Im Allgemeinen ist es schwierig, die Mengen aller darstellbaren Zahlen zu beschreiben. Für die quadratische Form $X^2 + Y^2$ bedeutet die Darstellbarkeit, dass n eine Summe von zwei Quadraten ist. Zur Beantwortung dieser Frage ist die Betrachtung der Faktorzerlegung in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ hilfreich.

DEFINITION 28.4. Eine binäre quadratische Form $aX^2 + bXY + cY^2$ heißt *einfach*, wenn die Koeffizienten a, b, c teilerfremd sind.

Wenn g der größte gemeinsame Teiler von a, b, c ist, so nennt man die durch

$$\frac{a}{g}X^2 + \frac{b}{g}XY + \frac{c}{g}Y^2$$

gegebene Form die *Vereinfachung* der ursprünglichen Form. Es handelt sich dann um eine einfache Form.

Zu einer Matrix $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Einträgen $r, s, t, u \in \mathbb{Z}$ und einer binären quadratischen Form $F = aX^2 + bXY + cY^2$ erhält man durch die Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{Z}$$

die neue quadratische Form $F' = F \circ M$. Wenn man die Variablen links mit V, W bezeichnet, so liegt insgesamt die quadratische Form vor, die ein Tupel (v, w) auf

$$a(rv + sw)^2 + b(rv + sw)(tv + uw) + c(tv + uw)^2 =$$
$$\left(ar^2 + brt + ct^2\right)v^2 + (2ars + bru + bst + 2ctu)vw + \left(as^2 + bsu + cu^2\right)w^2$$

abbildet. Die neuen Koeffizienten der transformierten Form sind also

$$a' = ar^2 + brt + ct^2, b' = 2ars + bru + bst + 2ctu \text{ und } c' = as^2 + bsu + cu^2$$

. Dies können wir auch als Matrixgleichung als

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{1}{2}b' \\ \frac{1}{2}b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

schreiben, siehe Aufgabe 28.5. Die Matrix M ist über $\mathbb{Z}$ genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante gleich 1 oder gleich -1 ist, siehe Aufgabe 28.1. Bei einer solchen invertierbaren Transformation ändern sich wesentliche Eigenschaften der Form nicht.

Definition 28.5. Zwei binäre quadratische Formen

$$F = aX^2 + bXY + cY^2 \text{ und } F' = a'X^2 + b'XY + c'Y^2$$

heißen *äquivalent*, wenn es eine ganzzahlige invertierbare 2×2-Matrix M mit

$$F' = FM$$

gibt.

Definition 28.6. Zwei binäre quadratische Formen

$$F = aX^2 + bXY + cY^2 \text{ und } F' = a'X^2 + b'XY + c'Y^2$$

heißen *strikt äquivalent*, wenn es eine ganzzahlige 2×2-Matrix M mit Determinante 1 und mit

$$F' = FM$$

gibt.

Die Formen $aX^2+bXY+cY^2$ und $aX^2-bXY+cY^2$ sind zueinander (über die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) äquivalent, aber im Allgemeinen nicht strikt äquivalent.

Lemma 28.7. (1) *Die Äquivalenz und die strikte Äquivalenz von binären quadratischen Formen ist eine Äquivalenzrelation.*

(2) *Die Diskriminante einer binären quadratischen Form hängt nur von deren Äquivalenzklasse ab.*

(3) *Die dargestellen Zahlen hängen nur von der Äquivalenzklasse der Form ab.*

Beweis. (1) Diese beiden Aussagen folgen daraus, dass das Produkt invertierbarer Matrizen (über $\mathbb{Z}$) wieder invertierbar ist und aus dem Determinantenmultiplikationssatz.

(2) Wir arbeiten mit der Umrechnungsregel für die Koeffizienten in Matrixform, also

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{1}{2}b' \\ \frac{1}{2}b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Der Determinantenmultiplikationssatz liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{diskr}(F) &= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} b' & 2c' \\ 2a' & b' \end{pmatrix} \\ &= -4 \cdot (\pm 1) \det \begin{pmatrix} b & 2c \\ 2a & b \end{pmatrix} (\pm 1) \\ &= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} b & 2c \\ 2a & b \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{diskr}(F). \end{aligned}$$

(3) Dies folgt unmittelbar aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{M} & \mathbb{Z}^2 \\ & F' \searrow & \downarrow F \\ & & \mathbb{Z} \, . \end{array}$$

□

Wir brauchen noch ein etwas abstrakteres Konzept von einer quadratischen Form.

DEFINITION 28.8. Sei R ein kommutativer Ring. Eine *quadratische Form* auf einem R-Modul L ist eine Abbildung

$$Q\colon L \longrightarrow R,$$

die die beiden Eigenschaften

(1)
$$Q(rv) = r^2 Q(v)$$
für alle $r \in R$ und $v \in L$,

(2)
$$Q(u+v) + Q(u-v) = 2Q(u) + 2Q(v)$$
für alle $u, v \in L$,

erfüllt.

Eine binäre quadratische Form auf $\mathbb{Z}^2$ ist eine quadratische Form in diesem Sinne, siehe Aufgabe 28.13. Auf einem freien $\mathbb{Z}$-Modul L vom Rang zwei, der also isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist, gibt es keine kanonische $\mathbb{Z}$-Basis, so dass eine quadratische Form auf ihm zunächst nicht in der expliziten Form von oben gegeben ist. Erst die Fixierung eines Isomorphismus

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow L$$

führt Q in die explizite Form über. Bei einer anderen Basis ändern sich zwar die Koeffizienten, doch sind die zugehörigen expliziten binären quadratischen Formen zueinander äquivalent, da sie durch die invertierbaren Basiswechselmatrizen ineinander überführt werden. Insbesondere ist die Diskriminante einer quadratischen Form auf L wohldefiniert.

Binäre quadratische Formen und quadratische Zahlbereiche

Ein quadratischer Zahlbereich $R \subset \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ ist nach Korollar 18.10 als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$. Ferner erfüllt die Norm

$$N\colon \mathbb{Q}[\sqrt{D}] \longrightarrow \mathbb{Q},\ x + y\sqrt{D} \longmapsto x^2 - y^2 D,$$

die Eigenschaften einer quadratischen Form. Die Werte der Norm eingeschränkt auf den Ganzheitsring (und auf jedes Ideal) liegen in $\mathbb{Z}$, deshalb

liegt ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang zwei zusammen mit einer quadratischen Form vor.

Beispiel 28.9. Wir bestimmen für die quadratischen Zahlbereiche R die binäre quadratische Form, die auf R durch die Norm gegeben ist. Sei also R der Ganzheitsring in $K = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ zu einer quadratfreien Zahl $D \neq 0, 1$.

Sei zunächst

$$D \equiv 2, 3 \mod 4.$$

Dann ist der Ganzheitsring nach Satz 20.9 gleich $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und wir arbeiten mit der $\mathbb{Z}$-Basis $1, \sqrt{D}$. Die Norm eines Elementes $x + y\sqrt{D}$ ist somit

$$N(x + y\sqrt{D}) = \det \begin{pmatrix} x & Dy \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 - Dy^2$$

und dies ist die explizite Beschreibung der durch die Norm gegebenen quadratischen Form. Ihre Diskriminante ist

$$\operatorname{diskr}(N) = 4D,$$

was gemäß Lemma 20.10 mit der Diskriminante $\triangle(R)$ des Zahlbereichs übereinstimmt.

Sei nun

$$D \equiv 1 \mod 4.$$

Dann ist der Ganzheitsring nach Satz 20.9 gleich $\mathbb{Z}[\omega]$ mit

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{D}}{2}$$

und wir arbeiten mit der $\mathbb{Z}$-Basis $1, \omega$. Die Norm eines Elementes $x + y\omega$ ist wegen

$$\begin{aligned} (x + y\omega)\,\omega &= x\omega + y\omega^2 \\ &= x\omega + y\left(\frac{D-1}{4} + \omega\right) \\ &= y\frac{D-1}{4} + (x+y)\omega \end{aligned}$$

gleich

$$\begin{aligned} N(x + y\omega) &= \det \begin{pmatrix} x & \frac{D-1}{4}y \\ y & x + y \end{pmatrix} \\ &= x^2 + xy - \frac{D-1}{4}y^2 \\ &= x^2 + xy + \frac{1-D}{4}y^2 \end{aligned}$$

und dies ist die explizite Beschreibung der durch die Norm gegebenen quadratischen Form. Ihre Diskriminante ist

$$\operatorname{diskr}(N) = 1 + (D-1) = D,$$

was gemäß Lemma 20.10 mit der Diskriminante $\triangle(R)$ des Zahlbereichs übereinstimmt.

Eine solche Interpretation der Norm gilt nicht nur für den ganzen Zahlbereich, sondern auch für jedes Ideal davon.

LEMMA 28.10. *Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein von 0 verschiedenes Ideal in R. Dann wird durch $f \mapsto \frac{N(f)}{N(\mathfrak{a})}$ eine binäre quadratische Form auf $\mathfrak{a}$ definiert, die einfach ist und deren Diskriminante gleich der Diskriminante des Zahlbereiches R ist.*

Beweis. Die Norm ist eine quadratische Form auf $\mathfrak{a}$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zu jedem Element $f \in \mathfrak{a}$ liegt ein surjektiver Restklassenhomomorphismus

$$R/(f) \longrightarrow R/\mathfrak{a}$$

vor. Beide Restklassenringe sind nach Satz 18.14 endlich, und somit ist die Anzahl von $R/\mathfrak{a}$ ein Teiler der Anzahl von $R/(f)$. Diese Anzahlen sind aber nach Definition bzw. (bis auf das Vorzeichen) nach Satz 21.7 gleich $N(\mathfrak{a})$ bzw. $N(f)$. Die Quotienten $\frac{N(f)}{N(\mathfrak{a})}$ liegen also in $\mathbb{Z}$ und es liegt eine ganzzahlige quadratische Form vor. Diese ist nach Korollar 18.9 binär.

Mit einer beliebigen $\mathbb{Z}$-Basis s, t des Ideals $\mathfrak{a}$ ist die durch die Norm gegebene binäre quadratische Form durch die Werte $N(s), N(s+t), N(t)$ festgelegt, und zwar lautet die explizite Beschreibung

$$N(s)X^2 + (N(s+t) - N(s) - N(t))XY + N(t)Y^2 \, .$$

Mit der Konjugation gilt

$$\begin{aligned} N(s) &= s\overline{s}, \\ N(t) &= t\overline{t} \end{aligned}$$

und

$$N(s+t) = (s+t)\overline{(s+t)} = s\overline{s} + s\overline{t} + t\overline{s} + t\overline{t}.$$

Somit ist der mittlere Koeffizient der quadratischen Form gleich

$$N(s+t) - N(s) - N(t) = s\overline{t} + t\overline{s}$$

und die Diskriminate der quadratischen Form ist gleich

$$(s\overline{t} + t\overline{s})^2 - 4N(s)N(t) = (s\overline{t} - t\overline{s})^2.$$

Wir ziehen nun die Basis (a, b) des Ideals gemäß Satz 21.1 heran. Die Diskriminante ist dann

$$(a\overline{b} - \overline{a}b)^2 = a^2(\overline{b} - b)^2.$$

Ja nach Fall ist die Klammer rechts gleich $2\beta\sqrt{D}$ bzw. gleich $2\beta\omega - \beta$. Im ersten Fall ist das Quadrat davon gleich $4\beta^2 D$. Im zweiten Fall ist das Quadrat davon gleich $\beta^2(2\omega - 1)^2 = \beta^2 D$. Wenn man also die Norm durch die Norm des Ideals dividiert, die ja nach Korollar 21.5 gleich $a\beta$ ist, so ergibt sich in beiden Fällen eine quadratische Form, deren Diskriminante gleich der Diskriminante des Zahlbereiches ist. Da die Diskriminante (bis eventuell auf

den Faktor 4) quadratfrei ist, folgt nach Aufgabe 28.12, dass die Form einfach ist. □

Beispiel 28.11. Wir betrachten im quadratischen Zahlbereich R zu $D = -5$ das Ideal

$$(2, 1 + \sqrt{-5}),$$

wobei die Erzeuger zugleich eine $\mathbb{Z}$-Basis sind. Die Norm dieses Ideals ist 2 und die durch die Norm gegebene quadratische Form hat bezüglich dieser Basis die Gestalt

$$4x^2 + 4xy + 6y^2.$$

Durch Vereinfachung im Sinne von Lemma 28.10, also Division durch die Norm des Ideals, gelangt man zur quadratischen Form

$$2x^2 + 2xy + 3y^2$$

mit der Diskriminante

$$4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 = 4(-5).$$

Diese Form ist nicht zur Hauptfrom der Diskriminante -20 aquivalent, denn diese ist $x^2 + 5y^2$. Letztere stellt beispielsweise den Wert 5 dar, erstere nicht.

Zwei zueinander äquivalente Ideale definieren eine Äquivalenzklasse von binären quadratischen Formen. Um strikte Äquivalenzklassen zu erhalten, muss man die strikte Äquivalenz von Idealen einführen.

Definition 28.12. Es sei R ein Zahlbereich. Zwei gebrochene Ideale $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ heißen *strikt äquivalent*, wenn es ein $h \in Q(R)$, $h \neq 0$, mit positiver Norm derart gibt, dass

$$\mathfrak{f} = (h)\mathfrak{g}.$$

Wenn man die strikte Äquivalenzklasse der Form erhalten möchte, so darf man nicht mit einer beliebigen $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals arbeiten, da beispielsweise die Vertauschung der Basiselemente die strikte Äquivalenzklasse der Form vertauscht. Stattdessen muss man mit einer orientierten Basis des Ideals arbeiten. Wir repräsentieren die positive Orientierung durch die Basis aus Satz 21.1. Die Übergangsmatrix zwischen zwei orientierungstreuen Basen besitzt die Determinante 1.

Satz 28.13. *Es sei R der quadratische Zahlbereich zur quadratfreien Zahl $D \neq 0, 1$ mit Diskriminante $\triangle = \triangle(R)$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{a} \longmapsto \left(\mathfrak{a}, \frac{N(-)}{N(\mathfrak{a})}\right),$$

die einem (orientierten) Ideal $\neq 0$ die durch die vereinfachte Norm gegebe binäre quadratische Form zuordnet, mit der strikten Äquivalenz von Idealen bzw. Formen verträglich, und stiftet eine Bijektion zwischen den strikten Idealklassen und den strikten Äquivalenzklassen von einfachen quadratischen Formen mit Diskriminante $\triangle$.

Beweis. Dass die Zuordnung aus einem Ideal eine binäre quadratische Form mit der entsprechenden Diskriminante macht, wurde in Lemma 28.10 gezeigt. Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ strikt äquivalente Ideale, d.h. es gibt ein $h \in R$ mit positiver Norm und mit $\mathfrak{b} = (h)\mathfrak{a}$. Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ gilt nach Satz 21.7 und Kollorar 21.11

$$\begin{aligned} \frac{N(hf)}{N(\mathfrak{b})} &= \frac{N(h)N(f)}{N((h)\mathfrak{a})} \\ &= \frac{N(h)N(f)}{N((h))N(\mathfrak{a})} \\ &= \frac{N(h)N(f)}{|N(h)|\,N(\mathfrak{a})} \\ &= \frac{N(f)}{N(\mathfrak{a})}, \end{aligned}$$

daher ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{\frac{N(-)}{N(\mathfrak{a})}} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \cdot h}\downarrow & \nearrow_{\frac{N(-)}{N(\mathfrak{b})}} & \\ \mathfrak{b} & & \end{array}$$

kommutativ. Da die Multiplikaton mit h ein R-Modulisomorphismus und insbesondere ein (orientierter) Gruppenisomorphismus zwischen $\mathfrak{a} \cong \mathbb{Z}^2$ und $\mathfrak{b} \cong \mathbb{Z}^2$ ist, der durch eine Matrix mit Determinante 1 gegeben ist, bedeutet dies, dass die quadratischen Formen strikt äquivalent sind.

Es sei nun eine einfache binäre quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ gegeben, deren Diskriminante $b^2 - 4ac$ gleich der Diskriminante des Zahlbereichs, also gleich D bzw. $4D$ sei. Im zweiten Fall ist b gerade und somit ist in beiden Fällen $\frac{b-\sqrt{\triangle}}{2}$ ein Element aus R.

Bei $a > 0$ betrachten wir

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\frac{b - \sqrt{\triangle}}{2}.$$

Dies ist ein Ideal.

Wegen Korollar 21.6 ist

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{a}) &= |-a| = a \\ N(a) &= a^2, \end{aligned}$$

und (für den Fall $D = 2, 3 \mod 4$)

$$\begin{aligned} N\left(\frac{b-\sqrt{\triangle}}{2}\right) &= N\left(\frac{b-2\sqrt{D}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{b}{2} - \sqrt{D}\right)\left(\frac{b}{2} + \sqrt{D}\right) \\ &= \frac{b^2}{4} - D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b^2-4D}{4} \\ &= \frac{b^2-\triangle}{4} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4} \\ &= ac \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N\left(a+\frac{b-\sqrt{\triangle}}{2}\right) &= N\left(\frac{2a+b}{2}-\sqrt{D}\right) \\ &= \left(\frac{2a+b}{2}\right)^2-D \\ &= \frac{4a^2+4ab+b^2-4D}{4} \\ &= \frac{4a^2+4ab+b^2-(b^2-4ac)}{4} \\ &= a^2+ab+ac. \end{aligned}$$

Wenn man diese drei charakteristischen Werte durch $N(\mathfrak{a}) = a$ dividiert, so erhält man die Werte a, c und $a+b+c$, was mit den Werten der vorgegebenen quadratischen Form übereinstimmt.

Für den Fall $a < 0$ setzt man

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\triangle} \cdot \left(a\mathbb{Z} + \frac{b-\sqrt{\triangle}}{2}\mathbb{Z}\right),$$

siehe Aufgabe 18.18.

Schließlich seien Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gegeben mit der Eigenschaft, dass ihre durch die vereinfachte Norm gegebenen quadratischen Formen strikt äquivalent sind. Diese strikte Äquivalenz bedeutet, dass sie durch eine Matrix M mit Determinante 1 miteinander verbunden sind. Es liegt also die Situation

$$\mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathfrak{a}'$$

vor. Wir multiplizieren das Ideal $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{a}')$ und das Ideal $\mathfrak{a}'$ mit $N(\mathfrak{a})$. Dann haben beide Ideale die gleiche Norm, die Matrix überträgt sich entsprechend und somit können wir annehmen, dass eine normerhaltende $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}'$$

vorliegt. Diese induziert eine normerhaltende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Q}[\sqrt{D}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{D}].$$

Nach Aufgabe 28.19 ist dies die Multiplikation mit einem Element h des Körpers $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ (die Determinantenbedingung schließt die Konjugation aus). Es ist also

$$\mathfrak{a}' = (h)\mathfrak{a}.$$

Da jedes Ideal positive ganze Zahlen enthält, muss der Faktor h (wie zuvor die Idealnormen) eine positive Norm besitzen. □

Die Konjugation auf R führt ein Ideal $\mathfrak{a}$ in das konjugierte Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ über. Dabei wird die Norm der Elemente und auch die vereinfachte Norm nicht geändert. Die resultierenden quadratischen Formen sind also äquivalent, im Allgemeinen aber nicht strikt äquivalent, da die Determinante der Konjugation gleich -1 ist. Die beiden Ideale müssen aber nicht äquivalent sein.