Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

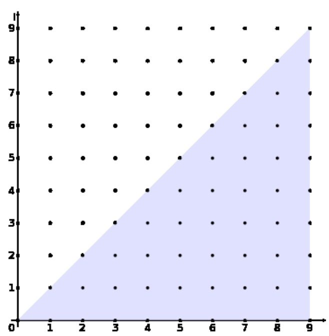
Aufgabe 9.1. Zeige, dass eine Primzahl p höchstens eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten besitzt.

Aufgabe 9.2.*

Zeige, dass eine ganze Zahl n genau dann die Differenz zweier Quadratzahlen ist, wenn der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung von n gleich 0 oder ≥ 2 ist.

Aufgabe 9.3. Bestimme für eine oder mehrere Gaußsche Zahlen in diesem Diagramm (oder diesem) die Primfaktorzerlegung und trage das Ergebnis (mit Begründung) in den vorgesehenen Link ein. Man beschränke sich dabei auf Zahlen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Die Gitterpunkte im farbig hinterlegten Bereich und entlang seines Randes sind als Link anklickbar. Gaußsche Ebene, 1. Quadrant



Gaußsche Ebene, 1. Quadrant

Aufgabe 9.4.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ die Primfaktorzerlegung von $8 - \mathrm{i}$. Begründe, warum die Faktoren prim sind.

Aufgabe 9.5. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ die Restklassendarstellung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$$

besitzen.

Aufgabe 9.7. Zeige, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ die Restklassendarstellung

$$\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$$

besitzt.

Aufgabe 9.8. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(n)$ genau n^2 Elemente besitzt.

Aufgabe 9.9. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zu einem Ideal $I \subseteq R$ welches $\mathfrak{a}$ enthält, sei $I' = IR/\mathfrak{a}$ das zugehörige Ideal in S. Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie

$$R/I \cong S/I'$$

gibt.

Aufgabe 9.10. Bestimme mit Hilfe von Bemerkung 9.4 eine Quadratwurzel von -1 in $\mathbb{Z}/(41)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.11. (3 Punkte)

Bestimme für die Zahlen n zwischen 155 und 159, ob n die Summe von zwei ganzzahligen Quadraten ist. Man gebe alle möglichen Darstellungen an.

Aufgabe 9.12. (2 Punkte)

Finde für alle Zehnerpotenzen ≥ 10 eine Darstellung als Summe von zwei positiven Quadraten.

Aufgabe 9.13. (4 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl, in deren Primfaktorzerlegung r Faktoren vorkommen. Wie viele Darstellungen als Summe von zwei Quadratzahlen besitzt n maximal?

Aufgabe 9.14. (7 (1+1+1+4) Punkte)

Für einen Körper K bezeichnet $K^{\times 2} \subseteq K^{\times}$ die Untergruppe aller Quadrate. Bestimme für die folgenden Körper die Restklassengruppe

$$K^{\times}/K^{\times 2}\,.$$

(1) K ist ein endlicher Körper.
(2) $K = \mathbb{R}$.
(3) $K = \mathbb{C}$.
(4) $K = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 9.15. (5 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.