Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Berechne für $p = 17$ und $k = 5$ den Ausdruck

$$S(k,p) = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{ki}{p} \right\rfloor .$$

Berechne damit $\left(\frac{k}{p}\right)$ mit Hilfe von Lemma 8.1.

Aufgabe 8.2. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 17 ein quadratischer Rest modulo 19 ist, oder nicht.

Aufgabe 8.3. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 23 ein quadratischer Rest modulo 73 ist, oder nicht.

Aufgabe 8.4. Bestimme mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Zusätze, ob 50 ein quadratischer Rest modulo 83 ist, oder nicht.

Aufgabe 8.5.*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{563}{1231}\right) .$$

Bemerkung: 563 und 1231 sind Primzahlen.

Aufgabe 8.6.*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{2333}{3673}\right) .$$

Aufgabe 8.7. Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{1489}{2437}\right).$$

Aufgabe 8.8.*

Beschreibe mittels geeigneter Kongruenzbedingungen diejenigen ungeraden Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass 7 ein Quadratrest modulo p ist.

Gibt es unendlich viele solche Primzahlen?

Aufgabe 8.9.*

Man gebe ein Beispiel an, wo das Jacobi-Symbol den Wert 1 hat, aber kein Quadratrest vorliegt.

Aufgabe 8.10. Suche für die folgenden zusammengesetzten Zahlen n eine zu n teilerfremde Zahl a derart, dass $a^{\frac{n-1}{2}} \neq \left(\frac{a}{n}\right)$ in $\mathbb{Z}/(n)$ gilt.

a) $n = 49$.

b) $n = 75$.

Aufgabe 8.11. Finde die Lösungen der Kongruenz

$$6x^2 + 4x + 1 \,=\, 0 \mod 35.$$

Aufgabe 8.12. Zeige für eine positive ungerade Zahl n die Gleichung

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.13. (4 Punkte)

Bestimme die Menge M der Reste modulo 40 mit der Eigenschaft, dass für jede ungerade Primzahl p gilt: 10 ist ein Quadratrest modulo p genau dann, wenn $p \mod 40$ zu M gehört.

Aufgabe 8.14. (5 Punkte)

Finde eine ungerade Primzahl p mit der Eigenschaft, dass alle Zahlen $a \leq 10$ Quadratreste modulo p sind.

Aufgabe 8.15. (3 Punkte)

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{337}{1339} \right) .$$

Aufgabe 8.16. (3 Punkte)

Zeige für eine positive ungerade Zahl n die Gleichung

$$\left(\frac{2}{n} \right) = (-1)^{(n^2-1)/8} .$$

Aufgabe 8.17. (3 Punkte)

Zeige für zwei ungerade positive Zahlen n und m die Beziehung

$$\left(\frac{m}{n} \right) \left(\frac{n}{m} \right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}} .$$