Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2016/2017

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1983 und 1528.

Aufgabe 3.2. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 3711 und 4115.

Aufgabe 3.3.*

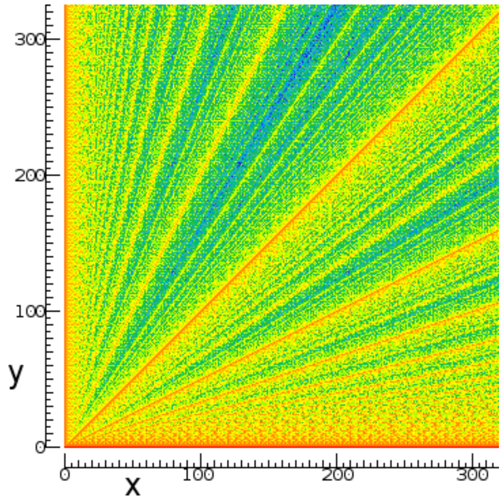
Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 71894 und 45327.

Aufgabe 3.4.*

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 3146 und 1515 und gebe eine Darstellung des ggT von 3146 und 1515 mittels dieser Zahlen an.

Aufgabe 3.5. Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

Aufgabe 3.6. Die Beschreibungsseite des folgenden Bildes behauptet, etwas mit dem euklidischen Algorithmus zu tun zu haben. Erläutere dies. Welche Eigenschaften des euklidischen Algorithmus sind in dem Bild sichtbar? Beweise diese Eigenschaften des Algorithmus.



Aufgabe 3.7. Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

Aufgabe 3.8. Bestimme in $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $X^3 + (2-i)X^2 + 4$ und $(3-i)X^2 + 5X - 3$.

Aufgabe 3.9. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $2X^4 - 7X^2 + \frac{5}{2}X + 3$ und $X^3 + 1$.

Aufgabe 3.10. Bestimme in $\mathbb{F}_7[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + 6X^2 + 4$ und $Q = X^2 + 3X + 2$.

Aufgabe 3.11. Bestimme in $\mathbb{Z}/(11)[X]$ den (normierten) größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 3 \quad \text{und} \quad X^2 + 7X + 10\,.$$

Aufgabe 3.12.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $23 + 2\mathrm{i}$ und $1 + 23\mathrm{i}$.

Aufgabe 3.13. Zeige, dass im Polynomring $K[X,Y]$ nicht das Lemma von Bezout gilt.

Aufgabe 3.14. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass in einem Hauptidealbereich R zu beliebigen Elementen $a_1, \ldots, a_n \in R$ sowohl ein größter gemeinsame Teiler als auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches existieren. Wie kann man sie berechnen, wenn die Primfaktorzerlegungen der Elemente bekannt sind?

Für $\mathbb{Z}$ lässt sich die Existenz einer Zerlegung in Primzahlen, also in irreduzible Elemente, einfach direkt zeigen.

Aufgabe 3.16.*

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe 3.17. Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} + 1$.

Aufgabe 3.18.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1728.

Aufgabe 3.19.*

Man gebe zwei Primfaktoren von $2^{35} - 1$ an.

Aufgabe 3.20. Sei p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

ist für alle $k = 1, \ldots, p-1$.

Aufgabe 3.21. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass

$$a^b = b^a$$

genau dann gilt, wenn

$$a = b$$

ist oder wenn $a = 2$ und $b = 4$ ist (oder umgekehrt).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.22. (2 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $35 + 18\mathrm{i}$ und $8 + 11\mathrm{i}$.

Aufgabe 3.24. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

In der folgenden Aufgabe wird der Logarithmus verwendet.

Aufgabe 3.25. (4 (3+1) Punkte)

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Bleibt das Ergebnis gültig, wenn man den natürlichen Logarithmus ln durch einen Logarithmus zu einer anderen Basis ersetzt?

Aufgabe 3.26. (3 (2+1) Punkte)

Sei $r \in \mathbb{N}$.

a) Finde r aufeinander folgende natürliche Zahlen (also $n, n+1, \ldots, n+r-1$), die alle nicht prim sind.

b) Finde unendlich viele solcher primfreien r-„Intervalle“.

Aufgabe 3.27. (6 (2+2+2) Punkte)

Zu einer natürlichen Zahl n bezeiche $T(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n. Zeige die folgenden Aussagen über $T(n)$.

a) Sei $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann ist

$$T(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1).$$

b) Für teilerfremde Zahlen n und m gilt $T(nm) = T(n)T(m)$.

c) Bestimme die Anzahl der Teiler von 20!.