Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 28

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1. Zeige, dass eine ganzzahlige 2×2-Matrix M genau dann (als ganzzahlige Matrix) invertierbar ist, wenn ihre Determinante gleich 1 oder -1 ist.

Aufgabe 28.2. Ergänze die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ & \end{pmatrix}$$

zu einer ganzzahligen Matrix mit Determinante 1.

Aufgabe 28.3. Zeige, dass für die Diskriminante $\triangle$ einer binären quadratischen Form

$$\triangle = 0, 1 \mod 4$$

gilt, und dass diese beiden Möglichkeiten durch die sogenannten *Hauptformen* $X^2 - \frac{\triangle}{4} Y^2$ bzw. $X^2 + XY - \frac{\triangle - 1}{4} Y^2$ realisiert werden.

Aufgabe 28.4. Es sei F eine einfache binäre quadratische Form. Zeige, dass die von der Menge der durch F darstellbaren Zahlen erzeugte Untergruppe gleich $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 28.5. Es sei $F = aX^2 + bXY + cY^2$ eine binäre quadratische Form und F' die mittels der Matrix $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ transformierte Form $F' = FM$. Zeige, dass für die Koeffizienten die Beziehung

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{1}{2}b' \\ \frac{1}{2}b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

besteht.

Aufgabe 28.6.*

Es sei $F = aX^2 + bXY + cY^2$ eine binäre quadratische Form und F' die mittels der Matrix $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ transformierte Form $F' = FM$. Dann besteht für die Koeffizienten die Beziehung

$$\begin{pmatrix} b' & 2c' \\ 2a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & s \\ t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2c \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.7. Zeige, dass die Eigenschaft einer binären quadratischen Form, einfach zu sein, nur von der Äquivalenzklasse der Form abhängt.

Aufgabe 28.8. Zeige, dass man mit der binären quadratischen Form

$$x^2 - 10y^2$$

weder die Zahl 2 noch die Zahl -2 darstellen kann.

Unter einer homogenen Linearform versteht man einen Ausdruck der Form $rX + sY$.

Aufgabe 28.9. Zeige, dass eine binäre quadratische Form $aX^2 + bXY + cY^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ über $\mathbb{C}$ in (homogene) Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 28.10. Es sei $aX^2 + bXY + cY^2$ eine binäre quadratische Form mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Charakterisiere mit Hilfe der Diskriminante, ob diese Form über $\mathbb{R}$ in (homogene) Linearfaktoren zerfällt.

Bei $a = 0$ oder $c = 0$ ist die Diskriminante gleich b^2, also ein Quadrat, und die Form zerfällt in $Y(bX + cY)$. Ein ähnliches Verhalten tritt stets aus, wenn die Diskriminante eine Quadratzahl ist. Dieser Fall ist vergleichsweise einfach und hat keine Entsprechung in den quadratischen Zahlbereichen.

Aufgabe 28.11. Es sei $aX^2 + bXY + cY^2$ eine binäre quadratische Form mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die Diskriminante genau dann eine Quadratzahl ist, wenn diese Form über $\mathbb{Q}$ in (homogene) Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 28.12. Zeige, dass eine binäre quadratische Form $aX^2 + bXY + cY^2$ mit einer quadratfreien (bzw. bis auf den Faktor 4 quadratfreien) Diskriminante einfach ist.

Aufgabe 28.13. Zeige, dass eine binäre quadratische Form $aX^2+bXY+cY^2$ eine quadratische Form auf dem $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^2$ im Sinne der Definition 28.8 ist.

Aufgabe 28.14. Es sei $Q\colon L \to R$ eine quadratische Form auf dem R-Modul L und $M \subseteq L$ ein R-Untermodul. Zeige, dass die Einschränkung von Q auf M ebenfalls eine quadratische Form ist.

Bei der nächsten Aufgabe denke man an $S = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}$, bei L an den Quotientenkörper eines quadratischen Zahlbereichs zusammen mit der Norm als quadratischer Form (mit Werten in $\mathbb{Q}$) und bei M an ein gebrochenes Ideal von L.

Aufgabe 28.15. Es sei L ein S-Modul und $Q\colon L \to S$ eine quadratische Form. Es sei $R \subseteq S$ ein Unterring und es sei $M \subseteq L$ ein R-Untermodul mit der Eigenschaft, dass die Werte von M unter Q zu R gehören. Zeige, dass die Einschränkung von Q auf M eine quadratische Form über R ist.

Aufgabe 28.16. Es sei $Q\colon L \to R$ eine quadratische Form auf dem R-Modul L, es sei M ein weiterer R-Modul und es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow L$$

ein R-Modulhomomorphismus. Zeige, dass $Q \circ \varphi$ eine quadratische Form auf M ist.

Aufgabe 28.17. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich und es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalente Ideale aus R. Zeige, dass dann die zugehörigen vereinfachten Normen als quadratische Formen äquivalent sind.

Aufgabe 28.18. Sei R ein quadratischer Zahlbereich mit Diskriminante $\triangle$ und sei $aX^2 + bXY + cY^2$ eine binäre quadratische Form zu dieser Diskriminante mit $a < 0$. Zeige wie im Beweis zu Satz 28.13, dass

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\triangle} \cdot \left(a\mathbb{Z} + \frac{b - \sqrt{\triangle}}{2}\mathbb{Z} \right)$$

ein Ideal in R ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Norm darauf die vorgegebene quadratische Form realisiert.

Aufgabe 28.19.*

Es sei

$$\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$$

eine quadratische Körpererweiterung und es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow L$$

eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung, die die Norm erhält. Zeige, dass φ die Multiplikation mit einem Element aus L oder aber die Hintereinanderschaltung der Konjugation mit einer solchen Multiplikation ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.20. (3 Punkte)

Ergänze die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7892 & 1551 \\ & \end{pmatrix}$$

zu einer ganzzahligen Matrix mit Determinante 1.

Aufgabe 28.21. (1 Punkt)

Berechne die Diskriminante der binären quadratischen Form

$$49X^2 + 65XY + 73Y^2 .$$

Aufgabe 28.22. (3 Punkte)

Bestimme, ob die binäre quadratische Form

$$1547X^2 + 4199XY + 1003Y^2$$

einfach ist oder nicht.

Aufgabe 28.23. (3 Punkte)

Zeige, dass man mit der binären quadratischen Form

$$2x^2 + 2xy + 3y^2$$

die Zahl 5 nicht darstellen kann.