Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 25

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.1. Beweise, dass es zu einem Zahlbereich R einen Gruppenisomorphismus

$$Q(R)^\times / R^\times \longrightarrow H$$

gibt, wobei H die Gruppe der Hauptdivisoren bezeichnet.

Aufgabe 25.2. Sei A_D ein quadratischer Zahlbereich und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq 0$ in A_D. Zeige, dass das konjugierte Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ in der Klassengruppe das Inverse zu $\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 25.3. Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$. Es sei $(f) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$ die Zerlegung in Primideale und es sei vorausgesetzt, dass f eine Primfaktorzerlegung besitzt. Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{p}_i$ Hauptideale sind.

Aufgabe 25.4. Bestimme in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamen Teiler für $22 + 25\sqrt{-2}$ und $43 - 23\sqrt{-2}$.

Aufgabe 25.5. Betrachte in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ die beiden Elemente

$$x = 4 + 7\sqrt{-2} \quad \text{und} \quad y = 5 + 8\sqrt{-2}\,.$$

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Normen $N(x)$ und $N(y)$ (in $\mathbb{Z}$) und das von x und y erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Aufgabe 25.6. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 6)$. Berechne den Hauptdivisor zu

$$q = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{-6}.$$

Aufgabe 25.7. Sei $R = A_{-15} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -15$. Berechne zu

$$q = \frac{3}{10} - \frac{5}{6}\sqrt{-15}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 25.8. Sei $R = A_{-11} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -11$. Berechne mittels des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von

$$35 + \sqrt{-11} \text{ und } -89 + 21\sqrt{-11}\,.$$

Aufgabe 25.9. Sei $R = A_{-7} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -7$. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$4 + 9\sqrt{-7}\,.$$

Aufgabe 25.10. Sei D quadratfrei mit $D = 3 \mod 4$ und $D < -1$. Zeige, dass $(2, 1 + \sqrt{D})$ ein Primideal im quadratischen Zahlbereich A_D ist, aber kein Hauptideal. Folgere, dass diese Ringe nicht faktoriell sind.

Aufgabe 25.11. Sei $D < 0$ quadratfrei und A_D der zugehörige imaginär-quadratische Zahlbereich. Bestimme für $D \geq -12$ die Nichteinheiten $z \in A_D$ mit minimaler Norm.

Aufgabe 25.12. Im quadratischen Zahlbereich $A_6 \cong \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ gilt

$$2 \cdot 3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}\,.$$

Finde die Primfaktorzerlegungen (?) der beteiligten Faktoren und des Produktes.

Aufgabe 25.13. Im quadratischen Zahlbereich $A_{-6} \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ gilt

$$-2 \cdot 3 = \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6}\,.$$

Kann man diese Produkte weiter zerlegen, sind die beteiligten Faktoren prim?

Aufgabe 25.14. Sei D quadratfrei und betrachte $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq A_D$. Charakterisiere für die beiden Ringe, wann $\sqrt{D}$ prim ist.

Aufgabe 25.15.*

Man gebe ein Beispiel von zwei Zahlbereichen R und S, die als Ringe nicht isomorph sind, aber die Eigenschaft haben, dass sowohl die additiven Strukturen $(R, +, 0)$ und $(S, +, 0)$ als Gruppen isomorph als auch die multiplikativen Strukturen $(R, \cdot, 1)$ und $(S, \cdot, 1)$ als Monoide isomorph sind.

Bei den beiden folgenden Aufgaben darf man sich auf quadratische Zahlbereiche beschränken, da wir nur für diese die Multiplikativität der Norm gezeigt haben.

Aufgabe 25.16. Es sei R ein Zahlbereich. Erweitere die (multiplikative) Normabbildung

$$\text{Ideale}\,(R) \longrightarrow \mathbb{N}_+,\ \mathfrak{a} \longmapsto N(\mathfrak{a}),$$

zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\text{Gebrochene Ideale}\,(R) \longrightarrow \mathbb{Q}^\times.$$

Aufgabe 25.17. Finde eine (additive) Gruppe G und Gruppenhomomorphismen φ und ψ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Gebrochene Ideale}\,(R) & \xrightarrow{\sim} & \text{Div}\,(R) \\ \text{Norm} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{Q}^\times & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

kommutiert und dass φ injektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.18. (4 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamen Teiler für $-169 + 2\sqrt{-2}$ und $-70 + 113\sqrt{-2}$.

Aufgabe 25.19. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei angenommen, dass jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, eine Primfaktorzerlegung in R besitzt. Zeige, dass dann R bereits faktoriell ist.

Aufgabe 25.20. (4 Punkte)

Sei $D \neq 0, 1$ quadratfrei und A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Sei p eine Primzahl, die in A_D nicht träge sei. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) p besitzt eine Primfaktorzerlegung in A_D.
(2) p ist nicht irreduzibel (also zerlegbar) in A_D.
(3) p oder $-p$ ist die Norm eines Elementes aus A_D.
(4) p oder $-p$ ist die Norm eines Primelementes aus A_D.

Aufgabe 25.21. (4 Punkte)

Sei $D \leq -2$ quadratfrei und betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Zeige, dass die einzige Faktorisierung (bis auf Einheiten) von D durch

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

gegeben ist. Zeige damit, dass $\sqrt{D}$ irreduzibel ist. Zeige ferner, dass falls $-D$ keine Primzahl ist, dann auch $\sqrt{D}$ nicht prim in R ist.