Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Sei R ein Zahlbereich. Zeige, dass die Abbildung, die einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, den Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ zuordnet, folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $\operatorname{div}(q_1 q_2) = \operatorname{div}(q_1) + \operatorname{div}(q_2)$.
(2) Es ist $\operatorname{div}(q_1 + q_2) \geq \min\{\operatorname{div}(q_1), \operatorname{div}(q_2)\}$.

Zeige insbesondere, dass diese Zuordnung einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \operatorname{Div}(R)$ definiert und dass die Hauptdivisoren eine Untergruppe der Divisoren bilden.

Aufgabe 24.2. Es sei R ein Zahlbereich und $f \in Q(R)$, $f \neq 0$. Zeige, dass $f \in R$ genau dann gilt, wenn der Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$ ein effektiver Divisor ist.

Aufgabe 24.3. Sei R ein quadratischer Zahlbereich. Definiere zu einem Divisor D den „konjugierten Divisor“ $\overline{D}$. Zeige, dass für $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Beziehung

$$\overline{\operatorname{div}(q)} = \operatorname{div}(\overline{q})$$

gilt.

Aufgabe 24.4.*

Sei $R = A_{14} = \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 14$. Berechne zu

$$q = \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

den zugehörigen Hauptdivisor.

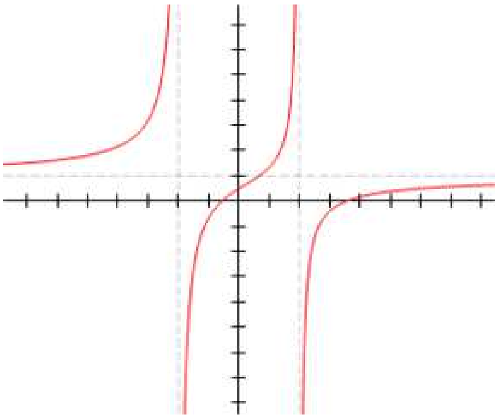
Aufgabe 24.5.*

Sei

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 6).$$

Berechne den Hauptdivisor zu

$$q = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\sqrt{-6}.$$



Aufgabe 24.6. Bestimme eine rationale Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die an der Stelle $2-\mathrm{i}$ einen Pol der Ordnung 4, in $-3+5\mathrm{i}$ eine Nullstelle der Ordnung 2 und in -3 einen Pol der Ordnung 3 besitzt.

Aufgabe 24.7. Es sei $f \neq 0$ eine rationale Funktion $f\colon \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Zeige, dass f in $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Ordnung n genau dann besitzt, wenn f^{-1} in a einen Pol der Ordnung n besitzt.

Aufgabe 24.8. Bestimme einen Erzeuger für das gebrochene Ideal $\mathfrak{f} \subseteq \mathbb{Q}$, das durch die rationalen Zahlen

$$\frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{13}{8}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 24.9. Der Floh Kurt lebt auf einem unendlichen Lineal und befindet sich in der Nullposition. Er verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\frac{11}{77}, \frac{25}{49}, \frac{82}{15}.$$

Berechne das zugehörige gebrochene Ideal,das seinem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 24.10.*

Sei $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Berechne einen Erzeuger für das gebrochene Ideal aus $Q(R) = \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$, das durch die beiden Erzeuger

$$\frac{5}{7} \text{ und } \frac{-8+6\mathrm{i}}{5}$$

gegeben ist.

Aufgabe 24.11. Es sei

$$\mathfrak{f} \subseteq Q(R)$$

ein gebrochenes Ideal zu einem Zahlbereich R. Zeige, dass

$$\mathfrak{f}^{-1} = \{q \in Q(R) | \, q \cdot \mathfrak{f} \subseteq R\}$$

ebenfalls ein gebrochenes Ideal ist.

Aufgabe 24.12.*

Es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale in einem Zahlbereich R. Es gelte

$$\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} = R.$$

Zeige, dass dann

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}^{-1}$$

ist.

Aufgabe 24.13. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem Zahlbereich R mit dem zugehörigen effektiven Divisor E. Zeige, dass das inverse gebrochene Ideal

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{q \in Q(R) | \, q \cdot \mathfrak{a} \subseteq R\}$$

gleich dem zu $-E$ gehörenden gebrochenen Ideal $\operatorname{Id}(-E)$ ist.

Aufgabe 24.14. Es sei R ein Zahlbereich und es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale.

(1) Zeige, dass wenn es ein $r \in Q(R)$, $r \neq 0$, mit

$$\mathfrak{g} = r\mathfrak{f}$$

gibt, dass dann die Multiplikation mit r, also

$$Q(R) \longrightarrow Q(R), \, f \longmapsto rf,$$

einen R-Modulisomorphismus

$$\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

induziert.

(2) Zeige, dass wenn es irgendeinen R-Modulisomorphismus

$$\varphi\colon \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

gibt, dass es dann schon ein $r \in Q(R)$ mit

$$\mathfrak{g} = r\mathfrak{f}$$

gibt, und dass der Isomorphismus eine Multiplikation ist.

Aufgabe 24.15. Beweise Lemma 24.12.

Aufgabe 24.16. Führe die Einzelheiten im Beweis zu Satz 24.13 aus.

Aufgabe 24.17. Beweise das Lemma von Dickson, das besagt, dass eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}^r$ nur endlich viele minimale Elemente besitzt.

Es sei

$$\varphi\colon A \longrightarrow B$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ nennt man das von $\varphi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal das *Erweiterungsideal* von $\mathfrak{a}$ unter φ. Es wird mit $\mathfrak{a}B$ bezeichnet.

Aufgabe 24.18. Es sei

$$\varphi\colon A \longrightarrow B$$

ein Ringhomomorphismus und es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Ideale in A. Beweise für die Erweiterungsideale die Gleichheiten

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\, B \,=\, \mathfrak{a}_1 B + \mathfrak{a}_2 B$$

und

$$(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)\, B \,=\, (\mathfrak{a}_1 B) \cdot (\mathfrak{a}_2 B)\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.19. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-13} = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -13$. Berechne zu

$$q = \frac{2}{3} - \frac{5}{7}\sqrt{-13}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 24.20. (4 Punkte)

Die Flöhin Paola lebt in der komplexen Ebene und befindet sich im Nullpunkt. Sie verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\mathrm{i},\; 2 + \frac{2}{3}\mathrm{i},\; \frac{1}{7} + 7\mathrm{i}\,.$$

Man gebe eine einfache Beschreibung des gebrochenen Ideals, das ihrem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 24.21. (4 Punkte)

Zeige direkt, dass die gebrochenen Ideale $\neq 0$ eine Gruppe bilden, und dass die gebrochenen Hauptideale darin eine Untergruppe bilden.

Aufgabe 24.22. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ (mit $f_i \neq 0$) ein Ideal in einem Zahlbereich R und sei vorausgesetzt, dass das inverse gebrochene Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ die Gestalt

$$\mathfrak{a}^{-1} = (f_1^{-1}, \ldots, f_n^{-1})$$

hat. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal sein muss.