Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Bestimme für alle $n \leq 30$, ob das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist oder nicht.

Aufgabe 14.2. Man gebe eine Liste aller natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 200 mit der Eigenschaft, dass das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Aufgabe 14.3. Welche der Winkel

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, \ldots, 10^\circ$$

sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Aufgabe 14.4. Welche der Winkel

$$10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, \ldots, 350^\circ$$

sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Aufgabe 14.5.*

Finde die kleinste Zahl $n \geq 100$ derart, dass zugleich das reguläre n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist und dass n eine Summe von zwei Quadraten ist.

Aufgabe 14.6. Sei p eine Sophie-Germain-Primzahl und $q = 2p + 1$. Sei a gegeben mit $2 \leq a \leq q - 2$. Zeige, dass a genau dann eine primitive Einheit modulo q ist, wenn es kein Quadratrest modulo q ist.

Aufgabe 14.7. Sei p eine Sophie-Germain-Primzahl, $q = 2p+1$. Zeige, dass q ein Teiler von $M_p + 2 = 2^p + 1$ ist genau dann, wenn $q = \pm 3 \mod 8$ ist.

Aufgabe 14.8.*

Zeige: Für eine Primzahl p ist die Mersennesche Zahl M_p quasiprim zur Basis 2.

Aufgabe 14.9. Zeige, dass 1105 und 1729 Carmichael-Zahlen sind.

Aufgabe 14.10. Sei p eine Primzahl > 3 mit der Eigenschaft, dass auch $2p-1$ und $3p-2$ prim sind. Zeige, dass dann

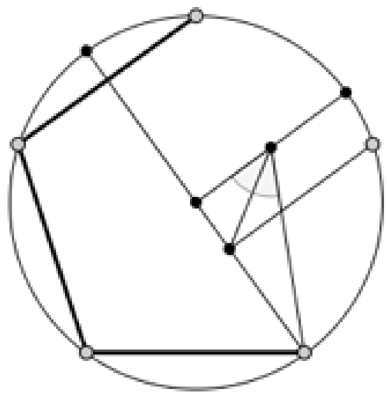
$$n = p(2p-1)(3p-2)$$

eine Carmichael-Zahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.11. (3 Punkte)

Beschreibe die Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines regelmäßigen Fünfecks, wie sie in der folgenden Animation dargestellt ist.



Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal

Aufgabe 14.12. (3 Punkte)

Sei p eine Sophie-Germain-Primzahl. Zeige, dass 2 eine Primitivwurzel modulo $q = 2p+1$ ist genau dann, wenn $p = 1 \mod 4$ ist.

Aufgabe 14.13. (3 Punkte)

Sei n eine Carmichael-Zahl. Zeige, dass n ungerade und mindestens drei Primfaktoren besitzt.

Aufgabe 14.14. (3 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass das Potenzieren

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n),\ a \longmapsto a^n,$$

genau dann die Identität ist, wenn n eine Primzahl, eine Carmichael-Zahl oder gleich 1 ist.