Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Eine natürliche Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn die Stammbruchsummenbedingung

$$\sum_{d|n,\, d\neq 1} \frac{1}{d} = 1$$

gilt. Schreibe für einige vollkommene Zahlen die Stammbruchsumme hin.

Aufgabe 13.2. Sei n eine gerade vollkommene Zahl. Berechne die eulersche Funktion $\varphi(n)$.

In den folgenden Aufgaben werden einige Begriffe verwendet, die mit dem Begriff der vollkommenen Zahl in Verbindung stehen.

Eine natürliche Zahl n heißt *defizient*, wenn die Summe der Teiler kleiner als $2n$ ist.

Eine natürliche Zahl n heißt *abundant*, wenn die Summe der Teiler größer als $2n$ ist.

Eine natürliche abundante Zahl heißt *sonderbar*, wenn sie nicht als eine Teilsumme von ihren echten Teilern darstellbar ist.

Aufgabe 13.3. Zeige: eine Primzahlpotenz p^r ist defizient.

Aufgabe 13.4. Sei $n > 6$ ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen. Zeige, dass dann n defizient ist.

Aufgabe 13.5. Zeige ohne Verwendung der Regel von Thabit, dass die beiden Zahlen 220 und 284 befreundet sind.

Aufgabe 13.6. Ergänze die folgende Tabelle um weitere Zeilen.

	$a = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$	$b = 3 \cdot 2^k - 1$	$c = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$	$m = 2^k ab$	$n = 2^k c$
2	5	11	71	220	284
3	11	23	$287 = 7 \cdot 41$ (nicht prim)		
4	23	47	1151	17296	18416
5	47	95	$4607 = 17 \cdot 271$ (nicht prim)		
6	$95 = 5 \cdot 19$ (nicht prim)	191	$18431 = 7 \cdot 2633$ (nicht prim)		
7	191	383	73727	9363584	9437056

Aufgabe 13.7. Zeige, dass die zahlentheoretische Möbius-Funktion multiplikativ ist.

Aufgabe 13.8. Zeige, dass eine zahlentheoretische multiplikative Funktion durch ihre Werte an Primzahlpotenzen festgelegt ist.

Aufgabe 13.9. Zeige, dass für die Faltung von zahlentheoretischen Funktionen die folgenden Aussagen gelten.

(1) Die Faltung ist eine kommutative und assoziative Verknüpfung.
(2) Die Faltungseinheit I ist das neutrale Element der Verküpfung.
(3) Es ist
$$U * \mu = I.$$

Aufgabe 13.10. Zeige
$$U * U = T,$$
wobei T die Teileranzahlfunktion bezeichnet.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass eine zahlentheoretische Funktion $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{C}$ genau dann invertierbar bezüglich der Faltung ist, wenn
$$f(1) \neq 0$$
ist.

In den folgenden Aufgaben bezeichnet $E\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{C}$ die Abbildung mit $E(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 13.12. Zeige, dass zwischen der Möbius-Funktion μ, der Identität E und der eulerschen φ-Funktion die Beziehung
$$\mu * E = \varphi$$
besteht.

Aufgabe 13.13. Zeige, dass zwischen den zahlentheoretischen Funktionen U, E, σ die Beziehung

$$U * E = \sigma$$

besteht.

Aufgabe 13.14. Zeige, dass die Menge der zahlentheoretischen Funktionen mit der komponentenweisen Addition und der Faltung einen kommutativen Ring bildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.15. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$$2^{33} - 1,\ 2^{91} - 1,\ 2^{13} + 1\,.$$

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Sei n eine gerade vollkommene Zahl, $n \neq 6$. Zeige, dass n die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Kubikzahlen ist.

Aufgabe 13.17. (3 Punkte)

Sei n eine ungerade Zahl mit der Eigenschaft, dass in ihrer Primfaktorzerlegung nur zwei verschiedene Primfaktoren vorkommen. Zeige, dass dann n defizient ist.

Aufgabe 13.18. (4 Punkte)

Finde eine ungerade abundante Zahl n.

Aufgabe 13.19. (3 Punkte)

Finde die kleinste sonderbare Zahl.

Aufgabe 13.20. (3 Punkte)

Zeige, dass der Quotient

$$\frac{\sigma(n)}{n}$$

unbeschränkt ist.