Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

Aufgabe 11.1. Finde die kleinste Zahl N der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten r Primzahlen sind.

Aufgabe 11.2. Berechne den Ausdruck

$$n^2 + n + 41$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Handelt es sich dabei um Primzahlen?

Aufgabe 11.3. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ gibt.

Aufgabe 11.4. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für reelles $s \leq 1$ divergiert.

Aufgabe 11.5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für eine komplexe Zahl s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert.

Aufgabe 11.6. Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{n \in M(\{3,5,7\})} \frac{1}{n^4}.$$

Aufgabe 11.7. Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}$$

divergiert.

Welche Beziehung besteht zwischen der vorstehenden Aufgabe und Satz 11.7?

Aufgabe 11.8. Zeige, dass es außer $3, 5, 7$ kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p + 2, p + 4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

Aufgabe 11.9. Zeige, dass es eine gerade Zahl g, $2 \leq g \leq 252$, mit der Eigenschaft gibt, dass es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass auch $p + g$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 11.10.*

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 den Rest 1 besitzen.

Aufgabe 11.11. Zeige unter Verwendung des Satzes von Dirichlet, dass eine Primzahl q modulo unendlich vieler Primzahlen p ein quadratischer Rest ist, aber auch modulo unendlich vieler Primzahlen ein nichtquadratischer Rest.

Aufgabe 11.12. Zeige, dass es keine unendlich lange arithmetische Progression gibt, die nur aus Primzahlen besteht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.13. (3 Punkte)

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 den Rest 3 besitzen.

Aufgabe 11.14. (6 Punkte)

Von wie vielen Zahlen ist „durchschnittlich“ die Zahl 7 der kleinste Primteiler? Erläutere dabei, warum diese Frage durchaus einen Sinn macht. Beschreibe alle Zahlen, deren kleinster Primteiler 7 ist (begründe!).

Beantworte die entsprechenden Fragen für eine beliebige Primzahl. Bis zu welcher Primzahl p muss man gehen, damit durchschnittlich mindestens 80% (oder 85% oder 90%) aller Zahlen einen Primteiler $\leq p$ besitzen.

Aufgabe 11.15. (3 Punkte)

Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Anzahl

$$\pi(ax) - \pi(x)$$

unbeschränkt ist.

Aufgabe 11.16. (3 Punkte)

Berechne das unendliche Produkt

$$\prod_{p \in \mathbb{P},\, p \geq 7} \frac{1}{1 - p^{-2}} \, .$$