

Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 9

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bestimme für die Zahlen n zwischen 155 und 159, ob n die Summe von zwei ganzzahligen Quadraten ist. Gebe alle möglichen Darstellungen an.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Finde für alle Zehnerpotenzen eine Darstellung als Summe von positiven Quadraten.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Zeige, dass eine Primzahl p höchstens eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten besitzt.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Finde die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zweifache Weise als Quadratsumme darstellen lässt, und die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zweifache Weise als Quadratsumme von positiven Zahlen darstellen lässt.

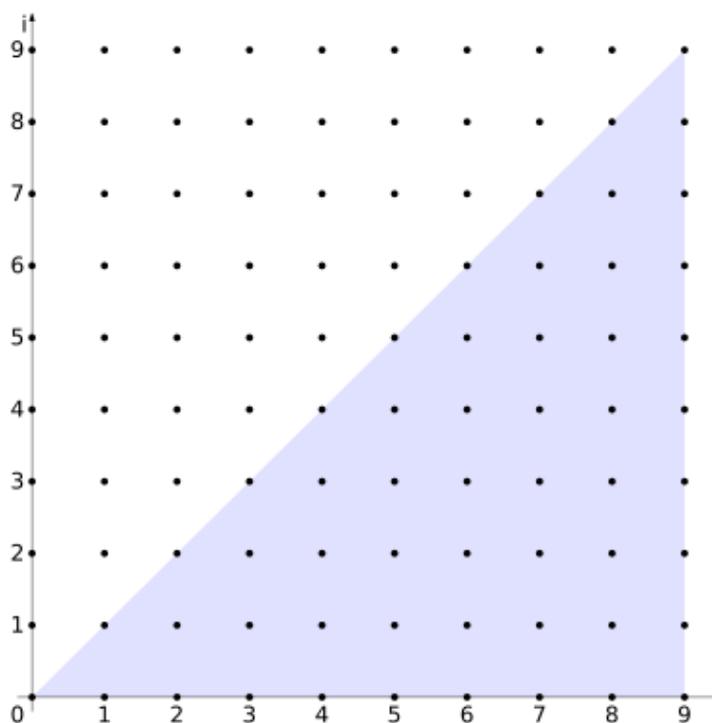
Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl, in deren Primfaktorzerlegung r Faktoren vorkommen. Wieviele Darstellungen als Summe von Quadratzahlen besitzt n maximal?

Aufgabe 6. (2 bis 3 Punkte)

Bestimme für eine oder mehrere Gaußsche Zahlen in diesem Diagramm (oder diesem) die Primfaktorzerlegung und trage das Ergebnis (mit Begründung) in den vorgesehenen Link ein. Man beschränke sich dabei auf Zahlen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Die Gitterpunkte im farbig hinterlegten Bereich und entlang seines Randes sind als Link anklickbar.



Gaußsche Ebene, 1. Quadrant

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Zeige, dass eine ganze Zahl n genau dann die Differenz zweier Quadratzahlen ist, wenn der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung von n gleich 0 oder ≥ 2 ist.

Aufgabe 8. (1+1+1+4 Punkte)

Für einen Körper K bezeichnet $K^{\times 2} \subseteq K^{\times}$ die Untergruppe aller Quadrate. Bestimme für die folgenden Körper die Restklassengruppe

$$K^{\times} / K^{\times 2}.$$

- (1) K ist ein endlicher Körper
- (2) $K = \mathbb{R}$.
- (3) $K = \mathbb{C}$.
- (4) $K = \mathbb{Q}$.