Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 24

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) - \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich. Zeige, dass die Abbildung, die einem Element $q \in Q(R)$ den Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ zuordnet, folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $\operatorname{div}(q_1 q_2) = \operatorname{div}(q_1) \operatorname{div}(q_2)$.
(2) Es ist $\operatorname{div}(q_1 + q_2) \geq \min\{\operatorname{div}(q_1), \operatorname{div}(q_2)\}$.

Zeige insbesondere, dass diese Zuordnung einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) - \{0\} \to \operatorname{div}(R)$ definiert und dass die Hauptdivisoren eine Untergruppe der Divisoren bilden.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei R ein quadratischer Zahlbereich. Definiere zu einem Divisor D den konjugierten Divisor $\bar{D}$. Zeige, dass für $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Beziehung gilt

$$\overline{\operatorname{div}(q)} = \operatorname{div}(\bar{q}) .$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-13} = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -13$. Berechne zu

$$q = \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{7}\sqrt{-13}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Der Floh Kurt lebt auf einem unendlichen Lineal und befindet sich in der Nullposition. Er verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\tfrac{11}{77}, \tfrac{25}{49}, \tfrac{82}{15} .$$

Berechne das zugehörige gebrochene Ideal, das seinem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Der Flöhin Paola lebt in der komplexen Ebene und befindet sich im Nullpunkt. Sie verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{5}i,\ 2 + \tfrac{2}{3}i,\ \tfrac{1}{7} + 7i\ .$$

Man gebe eine einfache Beschreibung des gebrochenen Ideals, das ihrem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Zeige direkt, dass die gebrochenen Ideale $\neq 0$ eine Gruppe bilden, und dass die gebrochenen Hauptideale darin eine Untergruppe bilden.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ (mit $f_i \neq 0$) ein Ideal in einem Zahlbereich R und sei vorausgesetzt, dass das inverse gebrochene Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ die Gestalt hat

$$\mathfrak{a}^{-1} = (f_1^{-1}, \ldots, f_n^{-1})\ .$$

Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal sein muss.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Definiere die Nenneraufnahme

$$M_S$$

und zeige, dass sie ein R_S-Modul ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Beweise Lemma 24.10.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Führe die Einzelheiten im Beweis zu Satz 24.11 aus.