Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 23

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $R = \bigcap_{i \in I} R_i$, wobei die $R_i \subset K$, $i \in I$, alle diskrete Bewertungsringe seien. Zeige: R ist normal.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei D quadratfrei und $D = 1 \mod 4$. Finde in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ derart, dass die Lokalisierung an $\mathfrak{p}$ kein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Bestimme den Hauptdivisor zur Gaußschen Zahl $5 + 7i$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -5$. Betrachte in R die Zerlegung

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \,.$$

Zeige, dass die beteiligten Elemente irreduzibel, aber nicht prim sind, und bestimme für jedes dieser vier Elemente die Primoberideale. Bestimme die Hauptdivisoren zu diesen Elementen.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und $f, g \in R$, $f, g \neq 0$. Zeige ohne Verwendung des Bijektionssatzes 23.11, dass die Hauptdivisoren $\operatorname{div}(f)$ und $\operatorname{div}(g)$ genau dann gleich sind, wenn f und g assoziiert sind.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige die beiden folgenden Äquivalenzen:

f ist prim genau dann, wenn der zugehörige Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$ die Gestalt $1\mathfrak{p}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ besitzt.

f ist irreduzibel genau dann, wenn $\operatorname{div}(f)$ minimal unter allen effektiven Hauptdivisoren $\neq 0$ ist.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$ gegeben als ein Produkt

$$f = u p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$$

mit paarweise nicht assoziierten Primelementen p_i und einer Einheit u. Dann gilt für den zugehörigen Hauptdivisor die Gleichheit

$$\operatorname{div}(f) = \nu_1 (p_1) + \ldots + \nu_r (p_r) ,$$

wobei die (p_i) die von p_i erzeugten Primideale bezeichnen.

Aufgabe 8. (7 Punkte)

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) n ist die Potenz einer Primzahl.
(2) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist zusammenhängend.
(3) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist lokal.
(4) Die Reduktion von $\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Körper.
(5) Jeder Nullteiler von $\mathbb{Z}/(n)$ ist nilpotent.
(6) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ besitzt genau ein Primideal.