Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 20

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Formuliere und beweise eine Version des Eulerschen Kriteriums für beliebige endliche Körper.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei q eine echte Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der zugehörige endliche Körper. Zeige, dass in $\mathbb{F}_{q^2}$ jedes Element aus $\mathbb{F}_q$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Bestimme den (Isomorphietyp des) Ganzheitsringes der quadratischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[X]/(X^2 + \tfrac{3}{2}X - \tfrac{5}{7}) \ .$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei D eine quadratfreie Zahl und betrachte die quadratische Erweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Es sei p ein Primfaktor von D mit Exponent 1 und es sei vorausgesetzt, dass weder p noch $-p$ ein Quadratrest modulo D/p ist. Dann ist p irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, aber nicht prim.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Bestimme die Primideale in R die über $p = 29$ liegen und zeige, dass es sich um Hauptideale handelt.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{15}]$. Bestimme die Primideale in R die über $p = 17$ liegen (gebe Idealerzeuger an). Handelt es sich um Hauptideale?

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Finde ein quadratfreies D derart, dass die natürliche Inklusion

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq A_D$$

die Eigenschaft besitzt, dass es zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ in A_D gibt, die beide über dem gleichen Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ liegen. Was ist $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$?

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Bestimme für die quadratischen Ganzheitsringe A_D mit negativem D sämtliche Einheiten.

Aufgabe 9. (1 Punkt)

Zeige, dass in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ das Element $8 + 3\sqrt{7}$ eine Einheit ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Zeige, dass 2 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ irreduzibel, aber nicht prim ist. Wie sieht es in A_5 aus?