Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 2

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeige mit Hilfe der Division mit Rest, dass jede (additive) Untergruppe von $\mathbb{Z}$ die Form $\mathbb{Z}a$ besitzt, also aus allen Vielfachen einer gewissen Zahl besteht.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Zeige: ein kommutativer Ring ist ein Körper genau dann, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen für einen kommutativen Ring R.

(1) Das Element a ist ein Teiler von b (also $a \mid b$) genau dann, wenn $(b) \subseteq (a)$.
(2) a ist eine Einheit genau dann, wenn $(a) = R = (1)$.
(3) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt $(a) = (b)$ genau dann, wenn a und b assoziiert sind.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Zeige, dass im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}i$ die Norm eine euklidische Funktion ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei R ein ein euklidischer Bereich mit euklidischer Funktion δ. Zeige, dass ein Element $f \in R$ $(f \neq 0)$ mit $\delta(f) = 0$ eine Einheit ist.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Betrachte die beiden folgenden Bedingungen:

(1) Es gibt ein Primelement $p \in R$ mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element $f \in R$, $f \neq 0$, eindeutig darstellen lässt als $f = up^i$ mit einer Einheit u und $i \in \mathbb{N}$.

(2) R ist ein euklidischer Bereich mit einer surjektiven euklidischen Funktion $\delta : R - \{0\} \to \mathbb{N}$, die zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt.

(a) Es gilt $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$ für alle $f, g \in R - \{0\}$.

(b) Es gilt $f|g$ genau dann, wenn $\delta(f) \leq \delta(g)$ für alle $f, g \in R - \{0\}$.

Zeige, dass beide Bedingungen äquivalent sind. Können Sie Beispiele für solche Ringe angeben?

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1983 und 1528.