Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

AUFGABE 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

AUFGABE 5.2. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die nach oben beschränkt ist. Es gelte also $x_m \leq x_n$ für $m \leq n$ und $x_n \leq b$ für alle n und eine gewisse reelle Zahl b. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

AUFGABE 5.3. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

AUFGABE 5.4. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

AUFGABE 5.5. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

AUFGABE 5.6.*

Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0,3333333333...$$

(die weiteren Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 5.7. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest. Zeige, dass

$$q = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$$

ist.

Aufgabe 5.8.*

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

Aufgabe 5.9.*

Es seien x, y reelle Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe 5.10. Bestimme die Dezimalentwicklung von $\frac{5}{7}$ anhand des in Satz 5.8 besprochenen Rekursionsschemas.

Aufgabe 5.11. Zeige, dass für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b} \in [0,1[$ das Rekursionsschema aus Satz 5.* die Eigenschaft besitzt, dass $s_i = \frac{r_i}{b}$ ein Bruch mit b als Nenner ist und dass die Beziehung

$$a10^i = bq_i + r_i$$

mit

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} z_j 10^{i-j}$$

gilt.

Aufgabe 5.12. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5.13. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 5.14. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

AUFGABE 5.15. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Ziffernentwicklungen eine Folge mit rationalen Gleidern an, die gegen xy konvergiert.

AUFGABE 5.16. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

AUFGABE 5.17. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n \,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n \,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufteilung zur Klausur am 2. Oktober 2014 um 10:00 Uhr!

BEU	35/E01	Lüken/Müller
Cognitive Science A-K	32/102	Caminata/Steinbuch
Cognitive Science L-Z	31/E06	Chu/Wageringel
Angew. Systemwissenschaft Geoinformatik Informatik Mathematik	66/E33-E34	Brenner/Böttger/Pölking

Rückgabe der Klausur am Montag, 6. Oktober 2014 um 8:30-9:30 Uhr im Raum 69/125!