Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben[1]

Aufgabe 1.1. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 1.2. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

(Man denke auch an die verschiedenen Möglichkeiten, ein quadratisches Gitter abzuzählen).

Aufgabe 1.3.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 1.4.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

[1]Eine Aufgabe mit Stern bedeutet, dass es dazu eine Lösung gibt, die über einen Link zu erreichen ist.

AUFGABE 1.5. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

AUFGABE 1.6. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

AUFGABE 1.7.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x}$$

ist.

AUFGABE 1.8. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1) \prod_{i=1}^{m} (2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m} (4k^2 - 1)\,.$$

AUFGABE 1.9. Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

AUFGABE 1.10.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

AUFGABE 1.11.*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 1.12. Welche Teilerbeziehung besteht zwischen 0 und einer beliebigen ganzen Zahl n und welche Teilerbeziehung besteht zwischen 1 und einer beliebigen ganzen Zahl n.

Aufgabe 1.13. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 1.14. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a+b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r+s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Bei der folgenden Aufgabe denke man etwa an $a = 10$.

Aufgabe 1.15. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch") wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 1.16. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

Aufgabe 1.17. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe 1.18. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Addieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich die Summe der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Aufgabe 1.19. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Multiplizieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich das Produkt der vorgegebenen Zahlen berechnet.