Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 30

Einfache Singularitäten in höherer Dimension

Wir möchten die Klassifikation der einfachen Singularitäten vom Kurvenfall auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Lemma 30.1. *Es sei f ein homogenes Polynom vom Grad 3 in zumindest 3 Variablen, das eine isolierte Singularität definiere. Dann liegt keine einfache Singularität vor.*

Lemma 30.2. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion mit einer einfachen isolierten Singularität im Nullpunkt. Dann ist der Rang der Hesse-Matrix zu f zumindest $n-2$.*

Beweis. Es sei k der Rang der Hesse-Matrix von f und $k \leq n-3$ angenommen. Dann ist f nach Satz 28.6 rechtsäquivalent zu $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ mit $h \in \mathfrak{m}^3$ und wobei h von zumindest drei Variablen abhängt und das ebenfalls eine isolierte Singularität besitzt. Dieses ist nach Lemma 30.1 nicht einfach. Aus Satz 28.7 folgt, dass dann auch $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ nicht einfach ist. □

Die Klassifikation der einfachen Singularitäten in höheren Dimension ergibt sich aus dem ebenen Fall also aus Satz 29.2, indem man die dortigen Funktionen um Summe von Quadraten ergänzt.

Satz 30.3. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $n \geq 2$, eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Dann ist f rechtsäquivalent zu einer der folgenden Funktionen.*

(1)
$$x^{k+1} + y^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n-2}^2 \text{ mit } k \geq 1, \quad \text{Typ } A_k\,.$$

(2)
$$x^2 y + y^{k-1} + z_1^2 + \cdots + z_{n-2}^2 \text{ mit } k \geq 4, \quad \text{Typ } D_k\,.$$

(3)
$$x^3 + y^4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-2}^2, \quad \text{Typ } E_6\,.$$

(4)
$$x^3 + xy^3 + z_1^2 + \cdots + z_{n-2}^2, \quad \text{Typ } E_7\,.$$

(5)
$$x^3 + y^5 + z_1^2 + \cdots + z_{n-2}^2, \quad \text{Typ } E_8\,.$$

Beweis. Da es sich um eine einfache isolierte Singularität im Nullpunkt handeln soll, verschwinden alle partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt. Der Rang k der Hesse-Matrix ist nach Lemma 30.2 zumindest $n-2$. Nach Satz 28.6 ist f rechtsäquivalent zu einer Funktion der Form

$$g = x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h$$

mit $h \in \mathfrak{m}^3$ und wobei h nur von den Variablen x_{n-1}, x_n abhängt. Bei $n-1, n$ hängt h sogar von weniger Variablen ab. In jedem Fall kann man h in den beiden letzten Variablen und mit $h \in \mathfrak{m}^2$ schreiben. Jede Entfaltung h_t von h ergibt unmittelbar eine Entfaltung von g. Die dabei entstehenden (deformierten) Funktionen haben die Form $\tilde{E}(-,t) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h_t(x_{n-1}, x_n)$. Wegen der Einfachheit von g treten dabei nur endlich viele Singularitätsklassen (im Sinne der Rechtsäquivalenz) auf, sagen wir $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h_i(x_{n-1}, x_n)$, $i \in I$, mit einer endlichen Indexmenge I. Für jedes $h_t(x_{n-1}, x_n)$ gibt es somit ein $i \in I$ derart, dass $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h_t(x_{n-1}, x_n)$ und $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h_i(x_{n-1}, x_n)$ zueinander rechtsäquivalent sind. Nach Satz 28.7 sind dann $h_t(x_{n-1}, x_n)$ und $h_i(x_{n-1}, x_n)$ zueinander rechtsäquivalent. Dies bedeutet, dass $h(x_{n-1}, x_n)$ ein einfacher Funktionskeim in zwei Variablen ist. Deren Rechtsäquivalenzklassen wurden in Satz 29.2 klassifiziert.

Wir müssen noch zeigen, dass die angegebenen Möglichkeiten wirklich einfach sind. $\square$

Für $n \geq 3$ handelt es sich dabei um irreduzible normale Singularitäten (bei $n = 2$ sind A_k für k ungerade, D_k und E_7 reduzibel).

Satz 30.4. *Es sei* $0 \in V(f) \subseteq \mathbb{C}^3$ *eine zweidimensionale isolierte Hyperflächensingularität. Dann ist die Singularität genau dann einfach, wenn es sich um eine spezielle Quotientensingularität handelt.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 30.3 einerseits und Satz 7.14 in Zusammenhang mit den Berechnungen aus der achten Vorlesung andererseits. $\square$

Abbildungsverzeichnis