

Singularitätentheorie

Vorlesung 29

Einfache Singularitäten

DEFINITION 29.1. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion. Man sagt, dass f im Nullpunkt eine *einfache Singularität* besitzt, wenn es eine endliche Liste $f_1, \dots, f_k$ von holomorphen Funktionen (die ebenfalls auf offenen Mengen des $\mathbb{C}^n$ definiert sind) derart gibt, dass in jeder Entfaltung

$$E: U' \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f mit $V \subseteq \mathbb{C}^m$ offen und zusammenhängend und $U' \subseteq U$ jede deformierte Funktion $f_w = E(-, w)$ mit w aus einer hinreichend kleinen offenen Umgebung $0 \in V' \subseteq V$ rechtsäquivalent zu einem f_i ist.

Zur Liste gehören natürlich stets f selbst und der reguläre Funktionskeim. Es geht also darum, inwiefern die durch f gegebene Singularität in nicht-rechtsäquivalente Singularitäten deformiert werden kann, wie groß also die „Deformationsklasse“ ist. Aufgrund von Bemerkung 27.2 geht es nur um das Verhalten von Entfaltungen in beliebig kleinen Umgebungen von f_0 . Auf den ersten Blick scheint dieses Konzept ziemlich kompliziert und unmotiviert zu sein; das Erstaunliche ist, dass man diese einfachen Singularitäten explizit klassifizieren kann und dass diese Klasse mit anders charakterisierten Klassen von Singularitäten übereinstimmt.

Der folgende Satz ist der Klassifikationssatz von Arnold für einfache Kurvensingularitäten.

SATZ 29.2. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ offen eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Dann ist f rechtsäquivalent zu einer der folgenden Funktionen.*

$$(1) \quad x^{k+1} + y^2 \text{ mit } k \geq 1, \text{ Typ } A_k.$$

$$(2) \quad x^2y + y^{k-1} \text{ mit } k \geq 4, \text{ Typ } D_k.$$

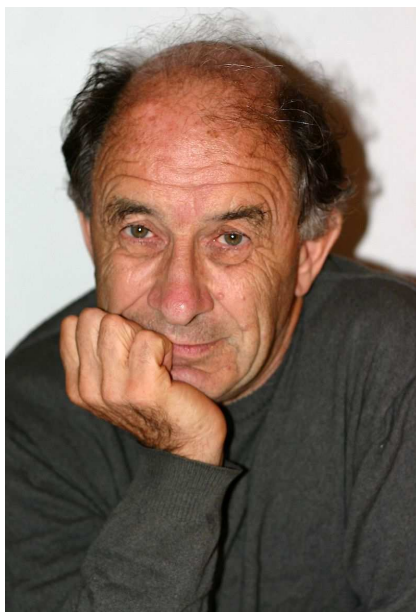
$$(3) \quad x^3 + y^4, \text{ Typ } E_6.$$

$$(4) \quad x^3 + xy^3, \text{ Typ } E_7.$$

(5)

$$x^3 + y^5, \text{ Typ } E_8.$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten, wir orientieren uns an der Originalarbeit von Arnold.



Vladimir Arnold

LEMMA 29.3. *Ein homogenes Polynom vom Grad 3 in 2 Variablen kann durch eine lineare Transformation in eine der Standardgestalten*

$$0 \text{ oder } x^2y + y^3 \text{ oder } x^2y \text{ oder } x^3$$

gebracht werden.

Beweis. Sei $f \neq 0$ ein homogenes Polynom vom Grad 3 in x und y . Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, einer Streckung und einer Variablenumbenennung ist

$$f = x(x + \alpha y)(x + \beta y).$$

Bei $\alpha = \beta = 0$ sind wir im vierten Fall. Sei also $\alpha \neq 0$, dann können wir auf

$$f = xy(x + \gamma y)$$

transformieren. Bei $\gamma = 0$ sind wir im dritten Fall. Sei also $\gamma \neq 0$. Durch eine Diagonalmatrix kann man dies auf $xy(x + y)$ bzw. sodann auf $y(x + y)(x - y)$ transformieren, was dem zweiten Fall entspricht. $\square$

LEMMA 29.4. *Die Singularitäten zu den holomorphen Funktionen x^2 und x^2y sind nicht einfach.*

Beweis. Wir betrachten die Entfaltungen

$$E_k: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y, t) \longmapsto x^2 + ty^k,$$

mit $k \in \mathbb{N}_+$. Für (beliebig kleines) $t \neq 0$ ist $x^2 + ty^k$ (durch eine lineare Transformation) rechtsäquivalent zu $x^2 + y^k$. Dies zeigt, dass $x^2 + y^k$ in Entfaltungen von x^2 auftreten. Die Funktionen $x^2 + y^k$, $k \in \mathbb{N}$, sind aber für verschiedene k nicht rechtsäquivalent zueinander, da ihre Milnorzahlen nach Beispiel 14.6 verschieden sind (nämlich gleich $k - 1$) und dies wegen Lemma 26.6 die Rechtsäquivalenz ausschließt. Das bedeutet, dass x^2 zu unendlich vielen nicht rechtsäquivalenten Singularitäten deformiert werden kann und daher nicht einfach ist.

Im zweiten Fall betrachtet man die Entfaltungen

$$E_k: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y, t) \longmapsto x^2y + ty^k.$$

Das Jacobiideal zur Funktion $x^2y + y^k$ ist

$$(xy, x^2 + ky^{k-1})$$

und die Milnorzahl hängt wieder von k ab, so dass man entsprechend argumentieren kann. $\square$

LEMMA 29.5. *Die Singularität zur holomorphen Funktion $x^3 + xy^4$ ist nicht einfach.*

Beweis. Wir betrachten die Familie

$$x^3 + xy^4 + ty^6, t \in \mathbb{C},$$

also die Entfaltung

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y, t) \longmapsto x^3 + xy^4 + ty^6.$$

Nach Aufgabe 29.4 kann man dieses Polynom als Produkt

$$(x - \alpha_1 y^2) (x - \alpha_2 y^2) (x - \alpha_3 y^2)$$

schreiben, wobei die α_i die Nullstellen von $x^3 + x + t$ sind. $\square$

Die Strategie zum Beweis von Satz 29.2 liegt darin, entlang des Ranges der Hessematrix von f zu argumentieren. Dieser Rang kann 0, 1, 2 sein, wobei der Fall, dass der Rang 0 ist, am schwierigsten ist. In diesem Fall muss man das dritte Taylorpolynom studieren, das homogen vom Grad 3 ist und wozu wir Lemma 29.3 heranziehen können. Es gibt dann jeweils noch viele Möglichkeiten für die höheren Bestandteile, doch werden diese durch Satz 28.2 und seine Korollare eingeschränkt. In den verbleibenden Möglichkeiten muss man dann entweder zeigen, dass keine einfache Singularität vorliegt, oder dass die Situation rechtsäquivalent zu einer der im Satz aufgelisteten Möglichkeiten ist.

LEMMA 29.6. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ offen eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Die Hessematrix von f habe den Rang 2. Dann ist f rechtsäquivalent zu $x^2 + y^2$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 28.5. $\square$

LEMMA 29.7. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ offen eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Die Hessematrix von f habe den Rang 1. Dann ist f rechtsäquivalent zu $x^2 + y^{k+1}$ für ein $k \geq 2$.*

Beweis. Nach Satz 28.6 ist f rechtsäquivalent zu $x^2 + h(y)$ mit $h \in \mathfrak{m}^3$. Der Fall $h = 0$ ist nach Lemma 29.4 ausgeschlossen, da dann die Singularität nicht einfach wäre. Also ist h nicht 0 und hat die Form

$$h(y) = ay^{k+1} + gy^{k+1}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g \in \mathfrak{m}$. Da eine Singularität im Nullpunkt mit Hesserang 1 vorliegt, muss $k \geq 2$ sein. Nach Beispiel 26.4 ist $h(y)$ rechtsäquivalent zu y^{k+1} . Damit ist f rechtsäquivalent zu $x^2 + y^{k+1}$ mit $k \geq 2$. $\square$

Die folgenden Lemmata setzen sich mit dem Fall auseinander, dass der Rang der Hessematrix gleich 0 ist. Dann beginnt die Taylorentwicklung im Grad 3 und in Lemma 29.3 wurden dafür die verschiedenen Möglichkeiten aufgelistet.

LEMMA 29.8. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ offen eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Das dritte Taylorpolynom von f sei x^2y . Dann ist f rechtsäquivalent zu $x^2y + y^{k-1}$ für ein $k \geq 5$.*

Beweis. Die Funktion f kann nicht rechtsäquivalent zu x^2y sein, da dieses nach Lemma 29.4 nicht einfach ist. Es müssen also in mindestens einem Taylorpolynom höheren Grades noch Terme hinzukommen. Es gibt also $d \geq 4$ und das d -te Taylorpolynom ist

$$x^2y + ay^d + 2bxy^{d-1} + x^2c(x, y)$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und c ein homogenes Polynom von Grad $d-2$. Wir wenden auf f die Transformation

$$x = \tilde{x} - by^{d-2}$$

und erhalten (mit $h \in \mathfrak{m}^{d+1}$)

$$\begin{aligned} f &= x^2y + ay^d + 2bxy^{d-1} + x^2c(x, y) + h(x, y) \\ &= (\tilde{x} - by^{d-2})^2y + ay^d + 2b(\tilde{x} - by^{d-2})y^{d-1} + (\tilde{x} - by^{d-2})^2c(x, y) + h(x, y) \\ &= \tilde{x}^2y - 2b\tilde{x}y^{d-1} + ay^d + 2b\tilde{x}y^{d-1} + \tilde{x}^2\tilde{c}(\tilde{x}, y) + \tilde{h}(\tilde{x}, y) \\ &= \tilde{x}^2y + ay^d + \tilde{x}^2\tilde{c}(\tilde{x}, y) + \tilde{h}(\tilde{x}, y), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{c}(\tilde{x}, y)$ wieder homogen vom Grad $d-2$ und $\tilde{h} \in \mathfrak{m}^{d+1}$ ist. Mit der holomorphen Transformation

$$y = \tilde{y} - \tilde{c}(\tilde{x}, y)$$

wird daraus

$$\tilde{x}^2y + ay^d + \tilde{x}^2\tilde{c}(\tilde{x}, y) + \tilde{h}(\tilde{x}, y) = \tilde{x}^2\tilde{y} + a\tilde{y}^d + \hat{h}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

mit $\hat{h}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathfrak{m}^{d+1}$. Bei $a = 0$ ist bezüglich der neuen Koordinaten das d -te Taylorpolynom gleich $\tilde{x}^2\tilde{y}$ und wir können die entsprechende Argumentation für das Taylorpolynom der Ordnung $d + 1$ durchführen. Da f nach Korollar 28.3 für r hinreichend groß r -bestimmt ist, kann dieser Prozess nicht immer $a = 0$ liefern, da sonst f rechtsäquivalent zu x^2y wäre, was aber nicht einfach ist. Also ist f rechtsäquivalent

$$x^2y + ay^d + h$$

mit $a \neq 0$ und $h \in \mathfrak{m}^{d+1}$. Wir behaupten, dass die Voraussetzungen von Satz 28.2 erfüllt sind. Das Jacobiideal ist

$$J_f = (2xy + \partial_x h, x^2 + day^{d-1} + \partial_y h).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} y^{d+1} &= \frac{y^2}{da} (x^2 + day^{d-1} + \partial_y h) - \frac{xy}{2da} (2xy + \partial_x h) + g, \\ x^i y^{d+1-i} &= \frac{x^{i-1} y^{d-i}}{2} (2xy + \partial_x h) + g \end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq d$ und

$$x^{d+1} = x^{d-1} (x^2 + day^{d-1} + \partial_y h) + g,$$

jeweils mit einem $g \in \mathfrak{m}^{d+2}$. Somit ist $\mathfrak{m}^{d+1} \subseteq J_f + \mathfrak{m}^{d+2}$. Daher ist f d -bestimmt und damit rechtsäquivalent zu $x^2y + ay^d$ und auch zu $x^2y + y^d$ mit $d \geq 4$. $\square$

LEMMA 29.9. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ offen eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Singularität im Nullpunkt. Das dritte Taylorpolynom von f sei x^3 . Dann ist f rechtsäquivalent zu $x^3 + y^4$, zu $x^3 + xy^3$ oder zu $x^3 + y^5$.*

Beweis. Das Taylorpolynom der Ordnung 4 zu f hat die Form

$$x^3 + ay^4 + bxy^3 + 3x^2c(x, y)$$

mit c homogen von Grad $d - 2$. Wir wenden auf f die Transformation

$$x = \tilde{x} - c(x, y)$$

an und erhalten

$$f = \tilde{x}^3 + ay^4 + b\tilde{x}y^3 + h(\tilde{x}, y)$$

mit $h \in \mathfrak{m}^5$ (das für das Taylorpolynom vom Grad 4 nicht relevant ist). Wir schreiben wieder x statt $\tilde{x}$.

Fall 1. Sei $a \neq 0$. Dann kann man durch die holomorphe Transformation (mit einer fixierten vierten Wurzel von a)

$$y = \frac{\tilde{y}}{a^{1/4}} - \frac{b}{4a}x$$

die Funktion f nach

$$x^3 + \tilde{y}^4 + x^2\hat{h}(x, \tilde{y}) + \tilde{h}$$

mit $\hat{h}$ homogen vom Grad 2 und $\tilde{h} \in \mathfrak{m}^5$ transformieren. Dies kann man wiederum mittels

$$\tilde{x} = x + \hat{h}$$

zu $\tilde{x}^3 + \tilde{y}^4 + \tilde{g}$ mit $\tilde{g} \in \mathfrak{m}^5$ transformieren. Es ist

$$J_f = (3x^2 + \partial_x \tilde{g}, 4y^3 + \partial_y \tilde{g})$$

und damit ist

$$\mathfrak{m}^5 \subseteq \mathfrak{m}^2 J_f + \mathfrak{m}^6,$$

so dass man Satz 28.2 anwenden kann. Also ist f 4-bestimmt und damit rechtsäquivalent zu $x^3 + y^4$.

Fall 2. Sei $a = 0$ und $b \neq 0$. Dann ist f rechtsäquivalent zu $x^3 + xy^3 + h$ mit $h \in \mathfrak{m}^5$. Wir schreiben f als

$$f = x^3 + xy^3 + ay^5 + bxy^4 + x^2h + g$$

mit $h \in \mathfrak{m}^2$ und $g \in \mathfrak{m}^6$. Mit

$$x = \tilde{x} - ay^2$$

transformiert sich dies zu

$$f = \tilde{x}^3 + \tilde{x}y^3 - 3a\tilde{x}^2y^2 + \tilde{b}\tilde{x}y^4 + \tilde{x}^2\tilde{h} + \tilde{g}$$

mit $\tilde{h}, \tilde{g}$ wie zuvor. Mit

$$y = \tilde{y} + a\tilde{x}$$

wird das zu

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^3 + \tilde{x}y^3 - 3a\tilde{x}^2y^2 + \tilde{b}\tilde{x}y^4 + \tilde{x}^2\tilde{h} + \tilde{g} \\ &= \tilde{x}^3 + \tilde{x}(\tilde{y} + a\tilde{x})^3 - 3a\tilde{x}^2(\tilde{y} + a\tilde{x})^2 + \tilde{b}\tilde{x}(\tilde{y} + a\tilde{x})^4 + \tilde{x}^2\tilde{h} + \tilde{g} \\ &= \tilde{x}^3(1 - 2a^3\tilde{x} - 3a^2\tilde{y}) + \tilde{x}\tilde{y}^3 + \tilde{b}\tilde{x}\tilde{y}^4 + \tilde{x}^2\tilde{h} + \tilde{g}. \end{aligned}$$

Der Term $1 - 2a^3\tilde{x} - 3a^2\tilde{y}$ ist in einer Umgebung des Nullpunktes ungleich 0. In den neuen Koordinaten

$$\hat{x} = \tilde{x} \sqrt[3]{1 - 2a^3\tilde{x} - 3a^2\tilde{y}}$$

und

$$\hat{y} = \tilde{y} \frac{1}{\sqrt[9]{1 - 2a^3\tilde{x} - 3a^2\tilde{y}}}$$

erhalten wir

$$\hat{x}^3 + \hat{x}\hat{y}^3 + \check{b}\hat{x}\hat{y}^4 + \hat{x}^2\check{h} + \check{g}.$$

Mittels

$$\check{x} = \hat{x} - \frac{1}{3}\check{h}$$

kann man den vierten Summanden wegstreichen und mittels

$$\check{y} = \hat{y} \sqrt[3]{1 + \check{b}\hat{y}}$$

erhält man

$$\check{x}^3 + \check{x}\check{y}^3 + \gamma$$

mit $\gamma \in \mathfrak{m}^6$. Es gilt wieder

$$\mathfrak{m}^6 \subseteq \mathfrak{m}^2 J_f + \mathfrak{m}^7$$

woraus 5-bestimmt nach Satz 28.2 folgt. Somit ist die Funktion rechtsäquivalent zu $x^3 + xy^3$.

noch: E8

Lemma 29.5 □

Es sei eine einfache Singularität gegeben. Wenn der Rang der Hessematrix gleich 2 oder gleich 1 ist, so zeigen Lemma 29.6 bzw. Lemma 29.7, dass die Singularität rechtsäquivalent zu einer A -Singularität ist. Sei der Rang der Hessematrix also gleich 0. Nach Lemma 29.3 hat das dritte Taylorpolynom nach einer linearen Transformation die Form

$$0 \text{ oder } x^2y + y^3 \text{ oder } x^2y \text{ oder } x^3.$$

Im Fall x^2y liegt nach Lemma 29.8 eine D_k -Singularität mit $k \geq 5$ vor. Im Fall x^3 liegt nach Lemma 29.9 eine E -Singularität vor. Im Fall 0 kann die Singularität nach nicht einfach sein. Es liege also der Fall $x^2y + y^3$ vor. Das Jacobiideal hat die Form

$$J_f \subseteq (2xy + h, x^2 + 3y^2 + g)$$

mit $h, g \in \mathfrak{m}^3$. Somit enthält das Produktideal $\mathfrak{m}^2 \cdot J_f$ Elemente der Form

$$x^3y + h_1, x^2y^2 + h_2, xy^3 + h_3, x^4 + 3x^2y^2 + h_4, x^2y^2 + 3y^4 + h_4$$

mit $h_j \in \mathfrak{m}^5$. Also gilt

$$\mathfrak{m}^4 \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot J_f + \mathfrak{m}^5.$$

Daher ist f nach Satz 28.2 3-bestimmt, und somit ist es rechtsäquivalent zu $x^2y + y^3$ selbst, was den D_4 -Typ ergibt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Vladimir Arnold-1.jpg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	2
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9