Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 28

Endliche Bestimmtheit

Eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, besitzt im Nullpunkt eine Taylorentwicklung, die auf einer offenen Umgebung des Nullpunktes konvergiert und dort die Funktion darstellt. Durch Verkleinern können wir direkt annehmen, dass auf U Konvergenz vorliegt. Insbesondere beschreibt die Taylorreihe die Funktion lokal vollständig und daher müssen auch Singularitätskonzepte wie Rechtsäquivalenz daraus ablesbar sein. Die Taylorreihe hat in Monomschreibweise die Form

$$\sum_\nu a_\nu X^\nu = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{|\nu|=k} a_\nu X^\nu \right).$$

Die abgebrochene Taylorentwicklung

$$\sum_{k=0}^d \left(\sum_{|\nu|=k} a_\nu X^\nu \right)$$

heißt das Taylorpolynom von f der Ordnung d. Wir bezeichnen es mit $T_d(f)$. Wenn wir, wie häufig, $f(0) = 0$ voraussetzen, so ist

$$T_0(f) = a_0 = 0$$

und wenn zusätzlich der Nullpunkt ein kritischer sein soll, so ist

$$T_1(f) = 0.$$

Wenn für zwei holomorphe Funktionen f und g die Taylorpolynome der Ordnung r übereinstimmen (was eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Potenreihen ist), so erwartet man, dass auch sonst gewisse Eigenschaften der Funktionen bzw. der durch sie gegebenen singulären Hyperflächen übereinstimmen.

Definition 28.1. Eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, heißt r- *bestimmt* , wenn jede holomorphe Funktion g mit

$$T_r(f) = T_r(g)$$

bereits zu f rechtsäquivalent ist.

Der folgende Satz heißt Satz von Mather.

SATZ 28.2. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion, wobei im lokalen Ring $\mathcal{O}_n$ die Beziehung*

$$\mathfrak{m}^{r+1} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot J_f + \mathfrak{m}^{r+2}$$

gelte, wobei J_f das Jacobiideal bezeichne und r eine natürliche Zahl ist. Dann ist f r-bestimmt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass eine holomorphe Funktion g, deren Taylorentwicklung der Ordnung r mit der Taylorentwicklung der Ordnung r von f übereinstimmt, unter der gegebenen Voraussetzung bereits rechtsäquivalent zu f ist. Wir können g als $g = f + h$ mit

$$h \in \mathfrak{m}^{r+1}$$

ansetzen. Wir wollen Lemma 27.8 verwenden. Wir betrachten also die holomorphe Hilfsfunktion

$$H(t,z) = f(z) + th(z)$$

für $t \in \mathbb{C}$ und müssen in den lokalen Ringen zu $(s,0) \in [0,1] \times \mathbb{C}^n$ (die wir unabhängig von s mit R bezeichnen) die Zugehörigkeit

$$h \in (z_1, \ldots, z_n)\,(\partial_{z_1} H, \ldots, \partial_{z_n} H)$$

nachweisen. Wir setzen

$$\mathfrak{a} = (\partial_{z_1} H, \ldots, \partial_{z_n} H)$$

und

$$\mathfrak{m} = (z_1, \ldots, z_n)$$

und betrachten diese Ideale in R, das maximale Ideal von R sei mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Es ist

$$\partial_{z_j} f = \partial_{z_j} H - t\partial_{z_j} h \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^r.$$

Die Voraussetzung

$$\mathfrak{m}^{r+1} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot J_f + \mathfrak{m}^{r+2}$$

gilt entsprechend auch in R, also ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{r+1} &\subseteq \mathfrak{m}^2\,(\partial_{z_1} f, \ldots, \partial_{z_n} f) + \mathfrak{m}^{r+2} R \\ &\subseteq \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{r+2} \\ &\subseteq \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{n}\mathfrak{m}^{r+1}. \end{aligned}$$

Mit

$$M = \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{r+1}$$

und

$$N = \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a}$$

gilt

$$\begin{aligned} M &= \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{r+1} \\ &\subseteq \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{n}\mathfrak{m}^{r+1} \\ &= \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} + \mathfrak{n}\mathfrak{m}^{r+1} \\ &\subseteq N + \mathfrak{n} M. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Nakayama folgt $M = N$ und insbesondere

$$\mathfrak{m}^{r+1} \subseteq \mathfrak{m}^2\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}.$$

Somit gilt $h \in \mathfrak{m}\mathfrak{a}$. □

Daraus erhalten wir die folgenden Spezialfälle.

Korollar 28.3. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion, wobei im lokalen Ring $\mathcal{O}_n$ die Beziehung*

$$\mathfrak{m}^{r-1} \subseteq J_f$$

gelte, wobei J_f das Jacobiideal bezeichne und r eine positive natürliche Zahl ist. Dann ist f r-bestimmt.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 28.2 durch beidseitige Multiplikation mit $\mathfrak{m}^2$. □

Korollar 28.4. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion, wobei im lokalen Ring $\mathcal{O}_n$ die Beziehung*

$$\mathfrak{m}^{r} \subseteq \mathfrak{m}J_f$$

gelte, wobei J_f das Jacobiideal bezeichne und r eine natürliche Zahl ist. Dann ist f r-bestimmt.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 28.2 durch beidseitige Multiplikation mit $\mathfrak{m}$. □

Satz 28.5. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion mit einer nichtausgearteten isolierten Singularität im Nullpunkt. Dann ist f rechtsäquivalent zur Quadrik $x_1^2 + \cdots + x_n^2$.*

Beweis. Wegen nichtausgeartet ist nach Lemma 14.14 das Jacobiideal zu f gleich dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Nach Korollar 28.3 ist f 2-bestimmt, also rechtsäquivalent zu seinem Taylorpolynom der Ordnung 2. Dieses kann man linear zur Standardquadrik transformieren. □

Satz 28.6. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion mit einem kritischen Punkt im Nullpunkt. Der Rang der Hesse-Matrix zu f sei k. Dann ist f rechtsäquivalent zu einer Funktion der Form*

$$g = x_1^2 + \cdots + x_k^2 + h$$

mit $h \in \mathfrak{m}^3$ und wobei h nur von den Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_n$ abhängt.

Beweis. Dies wird ähnlich wie Satz 28.5 bewiesen, ist aber aufwändiger. □

Satz 28.7. *Es seien $g_1, g_2\colon V \to \mathbb{C}$, $0 \in V \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, holomorphe Funktionen mit $g_1, g_2 \in \mathfrak{m}^3$ in den Variablen $y_1, \ldots, y_n$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann sind g_1 und g_2 genau dann zueinander rechtsäquivalent, wenn $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_1$ und $x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_2$ zueinander rechtsäquivalent (als Funktionskeime in $n + k$ Variablen) sind.*

Beweis. Wenn g_1 und g_2 zueinander rechtsäquivalent sind, so gibt es eine biholomorphe Abbildung $\psi\colon V \to W$ auf offenen Umgebungen der 0 in $\mathbb{C}^n$ mit $g_1 = g_2 \circ \psi$, und diese kann man durch die Identität zu einer biholomorphen Abbildung zwischen $\mathbb{C}^k \times V$ und $\mathbb{C}^k \times W$ fortsetzen, die zeigt, dass auch f_1 und f_2 rechtsäquivalent sind.

Es seien nun $f_1 = x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_1(y_1, \ldots, y_n)$ und $f_2 = z_1^2 + \cdots + z_k^2 + g_2(w_1, \ldots, w_n)$ zueinander rechtsäquivalent. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{C}^k$, $V \subseteq \mathbb{C}^n$, der 0 und eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi\colon\, U \times V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{C}^{k+n}$$

mit $f_1 = f_2 \circ \varphi$ (wir können nicht davon ausgehen, dass auf den ersten k Variablen die Identität vorliegt, deshalb müssen wir die Variablen unabhängig voneinander ansetzen). Es liegt also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & f_1 \searrow & \downarrow f_2 \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

vor. Unter φ entspricht der Unterraum $0 \times V$ einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $Z \subseteq W$. Für einen Punkt $(0, y) \in 0 \times V$ gilt wegen der speziellen Gestalt von f_1 bzw. f_2 und der Kettenregel für jedes i

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_{x_i} f_1)(0, y) \\ &= (\partial_{x_i} (f_2 \circ \varphi))(0, y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (\partial_{z_j} f_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_i}(z_j \circ \varphi))(0, y) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} f_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_i}(w_j \circ \varphi))(0, y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} 2z_j(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_i}(z_j \circ \varphi))(0, y) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} g_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_i}(w_j \circ \varphi))(0, y). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der $k \times k$-Matrix

$$M(0, y) = ((\partial_{x_i}(z_j \circ \varphi))(0, y))_{1 \le i, j \le k}$$

können wir diese Gleichungen als

$$-2M(0, y) \begin{pmatrix} \varphi_1(0, y) \\ \vdots \\ \varphi_k(0, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} g_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_1}(w_j \circ \varphi))(0, y) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} g_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_k}(w_j \circ \varphi))(0, y) \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Matrix $M(0, y)$ ist nach Aufgabe 26.25 im Nullpunkt invertierbar. Damit ist sie auch in einer offenen Umgebung für $y \in V' \subseteq V$ invertierbar. Es gilt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(y) \\ \vdots \\ z_k(y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1(0, y) \\ \vdots \\ \varphi_k(0, y) \end{pmatrix} \\ &= N(y) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} g_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_1}(w_j \circ \varphi))(0, y) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (\partial_{w_j} g_2)(\varphi(0, y)) \cdot (\partial_{x_k}(w_j \circ \varphi))(0, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der von y abhängigen inversen Matrix $N(y)$. Somit sind die $\varphi_i(0,y)$ als Linearkombinationen der $\left(\partial_{w_j} g_2\right)(\varphi(0,y))$ darstellbar und gehören insbesondere zum Jacobiideals zu den y_i.

$$
\begin{aligned}
g_1(y) &= f_1(0,y) \\
&= (f_2 \circ \varphi)(0,y) \\
&= f_2(\varphi_1(0,y), \ldots, \varphi_k(0,y), \varphi_{k+1}(0,y), \ldots, \varphi_{k+n}(0,y)) \\
&= (\varphi_1(0,y))^2 + \cdots + (\varphi_k(0,y))^2 + g_2(\varphi_{k+1}(0,y), \ldots, \varphi_{k+n}(0,y)).
\end{aligned}
$$

Dabei gehört die linke Summe zum Quadrat des Jacobiideals zu den y_i und der rechte Summand gehört zur dritten Potenz des maximalen Ideals in den y_i. Daher können wir Lemma 27.9 anwenden und erhalten, dass $g_1(y)$ und $g_2(w_1, \ldots, w_n)$ rechtsäquivlent ist. $\square$

Abbildungsverzeichnis