Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 26

In den verbleibenden Vorlesungen konzentrieren wir uns auf den holomorphen Standpunkt, insbesondere deshalb, weil man in der holomorphen Kategorie deutlich mehr Isomorphismen zur Verfügung habt, mit deren Hilfe man nahe verwandte Situationen ineinander überführen kann. Der hier relevante Unterschied zwischen der polynomialen (algebraischen) und der holomorphen Situation kommt schon darin zum Ausdruck, dass es zwar eine holomorphe Version des Satzes über implizite Abbildungen gibt, aber keine algebraische. Deshalb kann man rein algebraisch verschiedene glatte gleichdimensionale Punkte auf Varietäten nicht ineinander überführen, oft sind verschiedene Funktionenkörper der Varietäten ein Hindernis dafür (formal algebraisch, wenn man mit Komplettierungen arbeitet, ist das wiederum möglich). Wir besprechen hier die sogenannte Rechtsäquivalenz von holomorphen Funktionen (und der Singularitäten auf den dadurch definierten Hyperflächen) und Kriterien dafür, wann Rechtsäquivalenz vorliegt. Die Theorie der endlichen Bestimmtheit erlaubt es in vielen Fällen, zu zeigen, dass „kleine" algebraische Manipulationen den Rechtsäquivalenztyp nicht ändern. Die Frage, wie viele unterschiedliche Singularitäten bei einer Deformation einer holomorphen Funktion bzw. einer Hyperfläche auftreten können, führt zum Konzept der einfachen Singularitäten. Damit ergibt sich überraschenderweise eine neue Charakterisierung der ADE-Singularitäten.

Rechtsäquivalenz

Definition 26.1. Es seien $f_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2\colon U_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, mit $0 \in U_1, U_2$ und $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Dann heißen f_1, f_2 *rechtsäquivalent* (im Nullpunkt), wenn es offene Teilmengen $0 \in V_1 \subseteq U_1$ und $0 \in V_2 \subseteq U_2$ und eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$$

mit

$$f_1 = f_2 \circ \varphi$$

gibt.

Es liegt dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & V_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

vor. Man beachte, dass man dabei die offenen Definitionsbereiche durch kleinere ersetzen darf. Typischerweise wird diese Verkleinerung stillschweigend durchgenommen, man ändert die Bezeichnung der offenen Menge nicht. Statt von einer biholomorphen Abbildung spricht man auch von einer (holomorphen) *Transformation* oder einem (holomorphen) *Koordinatenwechsel*. Von Rechtsäquivalenz spricht man, da die vermittelnde biholomorphe Abbildung rechts steht. Mit der Umkehrabbildung φ^{-1} gilt dann die Beziehung $f_1 \circ \varphi^{-1} = f_2$, was die Symmetrie dieses Konzeptes sicherstellt. Insgesamt liegt eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Paare (U, f) bzw. auf der Menge der holomorphen Abbildungskeime vor.

Wenn man sich nicht auf den Nullpunkt konzentrieren möchte, so gilt eine entsprechende Definition, bei der dann φ den Punkt P_1 auf den Punkt P_2 abbilden muss und wo im Bildraum $\mathbb{C}$ noch die Bildpunkte ineinander verschoben werden.

LEMMA 26.2. *Es seien $f_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, mit $0 \in U_1, U_2$ und $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Für beide Funktionen sei 0 ein regulärer Punkt. Dann sind f_1 und f_2 zueinander rechtsäquivalent.*

Beweis. Da die Rechtsäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist, können wir annehmen dass f_2 die Projektion

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1,$$

die Projektion auf die erste Koordinate ist. Dann folgt die Aussage direkt aus der holomorphen Version des Satzes über implizite Abbildungen. $\square$

Insofern ist das Konzept Rechtsäquivalenz hauptsächlich für kritische Punkte von holomorphen Funktionen relevant. Im rein algebraischen Kontext gibt es keinen Satz über implizite Abbildungen und dort gibt es im Allgemeinen keinen Isomorphismus zwischen regulären Ringen gleicher Dimension.

LEMMA 26.3. *Es seien $f_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, mit $0 \in U_1, U_2$ und $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Die beiden Funktionen seien rechtsäquivalent. Dann sind die Hyperflächen $f_1^{-1}(0)$ und $f_2^{-1}(0)$ im Nullpunkt zueinander lokal analytisch isomorph und es liegt ein $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{O}_n/(f_1) \cong \mathcal{O}_n/(f_2)$ vor.*

Beweis. Die biholomorphe Abbildung $\varphi \colon V_1 \to V_2$, die es aufgrund der Rechtsäquivalenz gibt, überführt die Faser $V_1 \cap f_1^{-1}(0)$ unmittelbar in die Faser $V_2 \cap f_2^{-1}(0)$. Die biholomorphe Abbildung definiert dabei einen $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus

$$\mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n,\ h \longmapsto h \circ \varphi,$$

der f_2 in f_1 überführt. Dies induziert einen $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus

$$\mathcal{O}_n/(f_2) \longrightarrow \mathcal{O}_n/(f_1).$$

$\square$

Beispiel 26.4. Eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ in einer Variablen y (mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ offen) ist im Nullpunkt rechtsäquivalent zu einer Potenz y^k. Die Potenzreihenentwicklung von f im Nullpunkt hat die Form

$$ay^k + gy^k$$

mit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $g \in \mathfrak{m} = (y)$. Dann ist in einer offenen Umgebung von 0 die Funktion $a+g$ nullstellenfrei und daher ist auf einer offenen Umgebung der 0 auch eine Wurzel $\sqrt[k]{a+g}$ wohldefiniert und holomorph. Daher ist dort durch $y \mapsto y\sqrt[k]{a+h}$ eine biholomorphe Abbildung gegeben, die f und y^k als rechtsäquivalent erweist. Verschiedene Potenzen sind untereinander nicht rechtsäquivalent nach Lemma 26.3.

Bemerkung 26.5. Die Rechtsäquivalenz bedeutet insbesondere, dass es n konvergente Potenzreihen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in n Variablen (nämlich den Komponentenfunktionen zu φ) gibt, sagen wir

$$\varphi_i = \sum a_{\nu,i} Y^\nu,$$

derart, dass die Determinante der Matrix

$$(a_{j,i})$$

(die ja die lineare Approximation von φ im Nullpunkt ist) von 0 verschieden ist und dass die Potenzreihengleichheit

$$f_1 = f_2\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$$

gilt.

Lemma 26.6. *Es seien $f_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2\colon U_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, mit $0 \in U_1, U_2$ und $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Die beiden Funktionen seien rechtsäquivalent. Dann überführt der zur biholomorphen Abbildung*

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

gehörende $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus

$$\varphi^*\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O},\, g \longmapsto g \circ \varphi,$$

das Jacobiideal J_{f_2} in das Jacobiideal J_{f_1}, also

$$\varphi^* J_{f_2} = J_{f_1}.$$

Insbesondere haben die beiden Funktionen im Nullpunkt die gleiche Milnorzahl.

Beweis. Aufgrund der Rechtsäquivalenz gibt es eine biholomorphe Abbildung $\varphi\colon U_1 \to U_2$ und dadurch einen $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{O}_1,\, g \longmapsto g \circ \varphi,$$

(die Indizes beziehen sich auf die Räume, nicht auf die Dimension). Es seien $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten von U_1 und $y_1, \ldots, y_n$ die Koordinaten von U_2. Nach der Kettenregel gilt die Beziehung

$$(Df_2)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P = (Df_1)_P$$

für $P \in U_1$ bzw., mit den partiellen Ableitungen und als Gleichheit von Funktionstupeln auf U_1 geschrieben,

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} \circ \varphi, \ldots, \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \circ \varphi \right) \cdot (D\varphi) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right).$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_j} \circ \varphi \right) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$$

im lokalen Ring $\mathcal{O}_1$ und das bedeutet

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \in J_{f_2} \mathcal{O}_1$$

für alle i, also

$$J_{f_1} \subseteq J_{f_2} \mathcal{O}_1.$$

Wegen der Symmetrie der Situation gilt Gleichheit. □

Bemerkung 26.7. Das Konzept der Rechtsäquivalenz kann man auch rein algebraisch definieren, für Polynome oder rationale Funktionen f_1, f_2 auf Zariski-offenen Mengen U_1, U_2 im affinen Raum (oder für rationale Funktionen auf glatten gleichdimensionalen Varietäten) mit der Hilfe von (auf eventuell kleineren offenen Teilmengen definierten) Isomorphismen zwischen U_1 und U_2. Dabei sind aber, anders als in Lemma 26.2, noch nicht einmal glatte Punkte auf den Nullstellengebilden zueinander algebraisch rechtsäquivalent. Bei einer Isomorphie der umgebenden Räume, die die beiden algebraischen Situationen ineinander überführt, werden wie in Lemma 26.3 insbesondere auch die Nullstellengebilde ineinander überführt und diese sind daher isomorph. Einen solchen Isomorphismus kann es aber beispielsweise zwischen einer Geraden in der Ebene und der Kurve $V(X^3 + Y^3 - 1)$ nicht geben, da der Quotientenkörper der letzteren Kurve kein rationaler Funktionenkörper in einer Variablen ist.

Beispiel 26.8. Wir betrachten das Polynom $f = X^3 - Y^2$ und das zugehörige Nullstellengebilde $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K$, also die zugehörige ebenen monomiale Kurve. Wir betrachten die polynomiale Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K, \, (x, z) \longmapsto (x, xz) = (x, y),$$

die einen Isomorphismus

$$V_1 = D(X) \longrightarrow V_2 = D(X)$$

induziert, die Umkehrabbildung ist durch

$$z = \frac{y}{x}$$

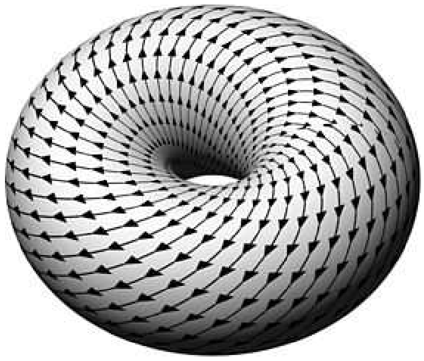
gegeben. Dabei ist

$$f \circ \varphi = X^3 - X^2 Z^2 = X^2 \left(X - Z^2 \right).$$

Somit liefert φ, eingeschränkt auf V_1 bzw. V_2 einen Isomorphismus, der die monomialen Kurve ohne die Singularität in die Parabel $V\left(X - Z^2\right)$ ohne den Nullpunkt überführt.

Vektorfelder und Flüsse

Um verschiedene Funktionen in kritischen Punkten als rechtsäquialent nachweisen zu können, brauchen wir vor allem biholomorphe Abbildungen, die diese Rechtsäquivalenz vermitteln. Eine wichtige Quelle solcher Abbildungen ergibt sich mit der Hilfe von Vektorfeldern und den zugehörigen Flüssen.



Definition 26.9. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung

$$F \colon M \longrightarrow TM$$

mit der Eigenschaft, dass $F(P) \in T_P M$ für jeden Punkt $P \in M$ ist, heißt (zeitunabhängiges) *Vektorfeld*.

Ein Vektorfeld F definiert für jeden Punkt $P \in M$ eine gewöhnliche zeitunabhängige Differentialgleichung (ein dynamisches System), nämlich

$$F(\varphi(t)) = \varphi'(t),$$

wobei $\varphi \colon I \to M$ die gesuchte auf einem reellen Intervall I mit $0 \in I$ definierte differenzierbare Kurve ist. Zu jedem Zeitpunkt t soll die Geschwindigkeit (also Ableitung) der Kurve mit dem durch das Vektorfeld vorgegebenen Richtungsvektor im Ortspunkt $\varphi(t)$ übereinstimmen und es soll die Anfangsbedingung $\varphi(0) = P$ erfüllt sein. Unter recht schwachen Bedingungen ist die Lösung einer solchen Differentialgleichung eindeutig. Wenn man den Punkt P

variiert, und die Lösungen zu jedem Anfangspunkt stets auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, so ergibt sich insgesamt eine Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t, P) \longmapsto \Psi(t, P),$$

wobei

$$\Psi(t, P) = \varphi_P(t)$$

und φ_P die Lösung der Differentialgleichung zum Startpunkt P ist. Die Abbildung Ψ enthält die volle Information über das Vektorfeld und alle Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen und heißt der *Fluss* zum Vektorfeld. Die Abbildung $\Psi(-, P)$ zu festem P ergibt die Lösungskurve und die Abbildung

$$\Psi(t, -)\colon M \longrightarrow M$$

zu festem t beschreibt, wohin ein Punkt P durch die Differentialgleichung hintransportiert wird. Das Vektorfeld F kann man über

$$F(P) = \partial_t|_{t=0}\Psi(t, P) = \varphi'_P(0)$$

ebenfalls aus Ψ ablesen. Die zu einem fixierten t gegebene Abbildung $\Psi(t, -)$ ist unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ein Diffeomorphismus der Mannigfaltigkeit M in sich. Dies kann man wiederum als eine Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}\,(M,\, M)\,,\ t \longmapsto \Psi(t, -),$$

auffassen. Dabei gilt $\Psi(0, -) = \mathrm{Id}_M$ und

$$\Psi(s + t, -) = \Psi(s, -) \circ \Psi(t, -)$$

für $s, t \in \mathbb{R}$. Das ist also ein Gruppenhomomorphismus der reellen additiven Gruppe in die Gruppe der Diffeomorphismen, man spricht von einer Einparametergruppe von Diffeomorphismen. Die begleitende Vorstellung ist dabei, dass die Identität mit Hilfe des Zeitparameters t in einen komplizierteren Diffeomorphismus deformiert wird.

Im Allgemeinen sind die Lösungen zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sondern nur auf bestimmten Intervallen, die auch noch vom Startpunkt P abhängen. Typischerweise ist dann Ψ nicht auf ganz $\mathbb{R} \times M$ definiert, sondern, bei gegebenem Punkt $P \in M$, auf einer Menge der Form $I \times U$, wobei I ein reelles Intervall mit $0 \in I$ und $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von P ist. Der Fluss ist also immerhin in einer Umgebung des Punktes für ein gewisses Zeitintervall definiert. Die Morphismen sind von der Form $\Psi_t\colon U \to M$ und sind Diffeomorphismen auf das (offene) Bild.

Definition 26.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $0 \in I = \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine differenzierbare Abbildung

$$\Psi\colon I \times U \longrightarrow M$$

heißt *lokal einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Für jedes $t \in I$ ist $\Psi_t \colon U \to M$ ein Diffeomorphismus auf die offene Menge $\Psi_t(U)$.
(2) Es ist $\Psi_0 = \mathrm{Id}_U$.
(3) Für $s, t \in I$ mit $s + t \in I$ und $P \in U$ mit $\Psi_t(P) \in U$ gilt

$$\Psi_{s+t}(P) = \Psi_s(\Psi_t(P)).$$

SATZ 26.11. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $P \in M$ und $F \colon M \to TM$ ein Vektorfeld auf M. Dann gibt es eine offene Umgebung $P \in U \subseteq M$, ein offenes Intervall I und eine lokal einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen*

$$\Psi \colon I \times U \longrightarrow M,$$

die das Vektorfeld löst.

Beweis. Dieser Satz wird in Büchern über Differentialgleichungen bewiesen. □

Abbildungsverzeichnis