

Singularitätentheorie

Vorlesung 23

Komplexe

In der nächsten Vorlesung wollen wir die homologische Charakterisierung von regulären Ringen beweisen. Dazu geben wir hier eine Einführung in die homologische Algebra und insbesondere zu freien Auflösungen.

DEFINITION 23.1. Es sei R ein kommutativer Ring. Ein *Kettenkomplex* (oder einfach Komplex) ist eine Folge M_n , $n \in \mathbb{Z}$, von R -Moduln zusammen mit einer Folge von Modulhomomorphismen¹

$$d_n: M_{n+1} \longrightarrow M_n$$

mit der Eigenschaft

$$d_{n-1} \circ d_n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Dies bedeutet, dass an jeder Stelle

$$\text{bild } d_n \subseteq \text{kern } d_{n-1}$$

gilt.

DEFINITION 23.2. Ein Kettenkomplex über einem kommutativen Ring heißt *exakt* an der Stelle n , wenn

$$\text{kern } d_{n-1} = \text{bild } d_n$$

gilt. Er heißt *exakt*, wenn er an jeder Stelle exakt ist.

Dies bedeutet wiederum, dass an jeder Stelle

$$\text{bild } d_n \supseteq \text{kern } d_{n-1}$$

gilt.

In der Form von kurzen exakten Sequenzen haben wir dieses Konzept bereits kennengelernt.

¹Diese Indizierung wählen wir in Hinblick auf die freien Auflösungen weiter unten.

Flache Moduln

Zu einer exakten Sequenz von R -Moduln

$$U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

und einem weiteren R -Modul M ist nach Proposition Anhang 5.4 auch die tensorierte Sequenz

$$U \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M \longrightarrow W \otimes_R M \longrightarrow 0$$

exakt. Allerdings ist zu einer injektiven Abbildung $U \rightarrow V$ (man denke beispielsweise an die Situation einer kurzen exakten Sequenz, bei der oben noch eine 0 links steht) die tensorierte Abbildung

$$U \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M$$

im Allgemeinen nicht injektiv. Wenn beispielsweise $f \in R$ ein Nichtnullteiler ist, so ist die Multiplikationsabbildung

$$\mu_f: R \longrightarrow R, x \longmapsto fx,$$

injektiv. Für den zu einem Ideal $I \subseteq R$ mit $f \in I$ gehörenden Restklassenring

$$M = R/I$$

ist aber die tensorierte Abbildung

$$\mu_f \otimes_R R/I: R \otimes_R R/I = R/I \longrightarrow R \otimes_R R/I = R/I$$

die Nullabbildung, da ja $[f] = 0$ in R/I ist. Diese ist nicht (mit der einzigen Ausnahme bei $I = R$) injektiv.

DEFINITION 23.3. Es sei R ein kommutativer Ring. Ein R -Modul M heißt *flach*, wenn die Tensorierung mit M die Exaktheit von beliebigen Sequenzen erhält.

Ein freier Modul ist flach, siehe Aufgabe 23.1. Restklassenmoduln sind typischerweise nicht flach.

LEMMA 23.4. *Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Dann ist der R -Modul R_S flach.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.2. □

Insbesondere ist eine Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ an einem Primideal und der Quotientenkörper zu einem Integritätsbereich flach.

Projektive Moduln

DEFINITION 23.5. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Der Modul M heißt *projektiv*, wenn es zu jedem surjektiven R -Modulhomomorphismus

$$\theta: A \longrightarrow B$$

und jedem Modulhomomorphismus

$$\varphi: M \longrightarrow B$$

einen Modulhomomorphismus

$$\psi: M \longrightarrow A$$

mit

$$\varphi = \theta \circ \psi$$

gibt.

Ähnlich wie flache Moduln werden projektive Moduln unter Bezug auf eine universelle Eigenschaft innerhalb der Kategorie aller Moduln definiert. Dies ist innerhalb der homologischen Algebra eine weitverbreitete Vorgehensweise. Eine unmittelbare Konsequenz der universellen Eigenschaft, die von projektiven Moduln gefordert wird, ergibt sich aus dem folgenden Spezialfall. Wir betrachten die Identität

$$\varphi: M \longrightarrow M$$

(also $B = M$) und eine surjektive Abbildung

$$p: F \longrightarrow M$$

mit einem freien Modul F . Für M projektiv gibt es dann ein

$$\psi: M \longrightarrow F$$

mit $p \circ \psi = \text{Id}_M$. Dies bedeutet

$$M \oplus \ker p = F$$

und das heißt, dass ein projektiver Modul ein direkter Summand eines freien Moduls ist. Umgekehrt ist ein direkter Summand eines freien Moduls selbst projektiv, siehe Aufgabe 23.4.

LEMMA 23.6. *Es sei R ein kommutativer lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M genau dann frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Dass freie Moduln projektiv sind wurde in Lemma Anhang 17.2 bewiesen. Sei also M projektiv. Es sei $m_1, \dots, m_n$ ein minimales Erzeugendensystem von M und sei

$$p: R^n \longrightarrow M$$

der zugehörige surjektive Modulhomomorphismus. Wegen der Minimalität ist

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$$

eine $R/\mathfrak{m}$ -lineare bijektive Abbildung. Wegen der Projektivität gibt es einen Modulhomomorphismus $i: M \rightarrow R^n$ mit $p \circ i = \text{Id}_M$. Dann ist

$$R^n \cong M \oplus N$$

mit $N = \text{kern } p$ und wobei wir M mit $i(M)$ identifizieren. Wir betrachten nun

$$R^n \xrightarrow{\cong} M \oplus N \longrightarrow M$$

und die induzierten $R/\mathfrak{m}$ -linearen Abbildungen

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N \longrightarrow M/\mathfrak{m}M.$$

Hierbei ist sowohl die Abbildung links als auch die Gesamtabbildung bijektiv. Daher muss $N/\mathfrak{m}N = 0$ sein. Aus Lemma Anhang 7.1 folgt $N = 0$ und somit ist $R^n = M$ frei. $\square$

DEFINITION 23.7. Ein R -Modul M über einem kommutativen Ring R heißt *lokal frei*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R die Lokalisierung $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul ist.

KOROLLAR 23.8. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M genau dann lokal frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Die eine Richtung folgt direkt aus Lemma 23.6 unter Berücksichtigung von Aufgabe 23.8. Zum Beweis der Umkehrung sei $p: L \rightarrow M$ ein surjektiver Modulhomomorphismus mit einem endlich erzeugten freien R -Modul L . Es ist zu zeigen, dass es einen Homomorphismus $i: M \rightarrow L$ mit $p \circ i = \text{Id}_M$ gibt. Dies ist insbesondere dann gesichert, wenn man zeigen kann, dass der natürliche Homomorphismus

$$\text{Hom}_R(M, L) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M), \varphi \longmapsto p \circ \varphi,$$

surjektiv ist, da ja dann insbesondere die Identität getroffen wird. Nach Lemma Anhang 18.4 kann man die Surjektivität lokal testen. Für die Homomorphismenmoduln gilt unter den gegebenen Endlichkeitsvoraussetzungen

$$(\text{Hom}_R(M, L))_{\mathfrak{p}} = \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}).$$

Die Surjektivität von

$$\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$$

folgt aber für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus der Freiheit von $M_{\mathfrak{p}}$ und Lemma Anhang 17.2. $\square$

KOROLLAR 23.9. *Es sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine glatte Varietät über einem vollkommener Körper und es sei R der affine Koordinatenring zu V . Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ lokal frei von konstantem Rang $\dim(R)$ und insbesondere ein projektiver Modul.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 21.7, Lemma 12.6 und Korollar 23.8. $\square$

BEISPIEL 23.10. Wir betrachten die reelle Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit dem affinen Koordinatenring

$$R = \mathbb{R}[X, Y, Z] / (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1).$$

Der R -Modul der Kählerdifferentialle ist nach Korollar 13.2 gleich

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = R dX \oplus R dY \oplus R dZ / (X dX + Y dY + Z dZ).$$

Eine direkte Überprüfung zeigt, dass die reelle Sphäre glatt ist. Nach Satz 21.7 ist somit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei (von konstantem Rang 2). Dies kann man auch direkt von der Darstellung her begründen, siehe Aufgabe 23.11. Dagegen ist $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ nicht frei. Dies ist eine algebraische Version des Satzes vom Igel, dass man ihn nicht glattkämmen kann, also die Stacheln nicht wirbelfrei tangential an die Kugel anlegen kann.

Freie Auflösungen

DEFINITION 23.11. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Eine *freie Auflösung* ist ein (linksseitig unendlicher) exakter Komplex

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

wobei die F_i freie endlich erzeugte R -Moduln sind.

Die F_i haben somit die Form $F_i = R^{r_i}$ mit $r_i \in \mathbb{N}$. Die R -Modulhomomorphismen

$$\theta_i: F_{i+1} = R^{r_{i+1}} \longrightarrow F_i = R^{r_i}$$

werden durch Matrizen beschrieben. Da $F_0 \rightarrow M$ surjektiv ist, muss M endlich erzeugt sein, wenn es für ihn eine freie Auflösung gibt. Den Modul M kann man aus der Auflösung $F_\bullet$, bei der man M weglässt, als Kokern von θ_0 rekonstruieren. Die Bedeutung von freien Auflösungen liegt darin, beliebig komplizierte und insbesondere hochgradig nichtfreie Moduln durch freie Moduln zu beschreiben.

LEMMA 23.12. *Es sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann besitzt M eine freie Auflösung mit endlich erzeugten freien Moduln.*

Beweis. Zunächst gibt es einen surjektiven R -Modulhomomorphismus

$$\theta_{-1}: F = R^{r_0} \longrightarrow M,$$

wobei die Standardvektoren e_i auf ein (endliches) Erzeugendensystem m_i von M abgebildet werden. Somit hat man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_0 = \ker(\theta_{-1}) \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Nach Satz 10.4 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)) ist F_0 ein noetherscher Modul und somit ist M_0 ebenfalls endlich erzeugt. Man findet daher wieder eine Surjektion

$$\theta_0: F_1 \longrightarrow M_0$$

und so kann man induktiv fortfahren. $\square$

DEFINITION 23.13. Eine freie Auflösung

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eines R -Moduls heißt *minimal*, wenn in jedem Schritt die Abbildung

$$\theta_i: F_{i+1} \longrightarrow M_i \subseteq F_i$$

durch ein Erzeugendensystem von

$$M_i = \ker \theta_{i-1}$$

von minimaler Anzahl gegeben ist.

LEMMA 23.14. *Es sei R ein lokaler noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R -Modul und*

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung von M . Dann ist der Rang von F_i gleich der $R/\mathfrak{m}$ -Dimension von $M_i \otimes_R R/\mathfrak{m}$ mit $M_i = \ker(\theta_{i-1})$.

Beweis. Siehe Aufgabe 23.12. $\square$

SATZ 23.15. *Es sei R ein lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist die minimale freie Auflösung von M im folgenden Sinne eindeutig bestimmt: Wenn*

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

und

$$\dots \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

minimale freie Auflösungen von M sind, dann gibt es R -Modulisomorphismen

$$\Psi_i: F_i \longrightarrow G_i$$

derart, dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_{i+1} & \xrightarrow{\theta_i} & F_i \\ \Psi_{i+1} \downarrow & & \downarrow \Psi_i \\ G_{i+1} & \xrightarrow{\theta'_i} & G_i \end{array}$$

kommutieren.

Beweis. Wir konstruieren induktiv die Ψ_i , $i \in \mathbb{N}$. Für $i = 0$ betrachten wir die Situation

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\theta_{-1}} & M \\ ? \downarrow & \nearrow \theta'_{-1} & \\ G_0 & & \end{array}.$$

Wegen der Minimalität rühren beide Abbildungen von einem minimalen Modulerzeugendensystem der Länge n von M her, sagen wir

$$\theta_{-1}(e_j) = u_j$$

und

$$\theta'_{-1}(e_j) = v_j.$$

Es ist dann

$$\theta_{-1}(e_j) = u_j = \sum_{i=1}^n r_{ij} v_i.$$

Durch die Festlegung

$$\Psi_0(e_j) := \sum_{i=1}^n r_{ij} e_i$$

erhält man dann einen R -Modulhomomorphismus von F_0 nach G_0 , der mit den gegebenen Abbildungen kommutiert. Die Abbildung ist surjektiv, da andernfalls ein echter Untermodul von G_0 schon surjektiv auf M abbildet würde, was der Minimalität von G_0 widerspricht (siehe Aufgabe 23.15). Dieser Isomorphismus führt somit auch die Kerne

$$M_0 = \ker \theta_{-1}$$

und

$$N_0 = \ker \theta'_{-1}$$

ineinander über. Es sei nun vorausgesetzt, dass die Isomorphismen Ψ_i schon konstruiert sind und die Kerne ineinander überführen. Dann liegt die Situation

$$\begin{array}{ccccc} F_{i+1} & \xrightarrow{\theta_i} & M_i & \longrightarrow & F_i \\ ? \downarrow & & \Psi_i|_{M_i} \downarrow & & \downarrow \Psi_i \\ G_{i+1} & \xrightarrow{\theta'_i} & N_i & \longrightarrow & G_i \end{array}$$

vor, wobei das Quadrat rechts kommutiert. Sowohl θ_i als auch θ'_i rühren von einem minimalen Erzeugendensystem von M_i bzw. N_i her. Das im Wesentlichen gleiche Argument wie am Induktionsanfang zeigt, dass es einen Isomorphismus

$$\Psi_{i+1}: F_{i+1} \longrightarrow G_{i+1}$$

gibt, der die Kerne ineinander überführt. □

Endliche projektive Dimension

DEFINITION 23.16. Es sei R ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Man sagt, dass M eine *endliche projektive Dimension* besitzt, wenn es eine freie Auflösung

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $F_n = 0$ für $n \geq n_0$ gibt. In diesem Fall nennt man das Minimum der n mit $F_{n+1} = 0$ für alle freie Auflösungen die *projektive Dimension* von M .

Die projektive Dimension eines Moduls ist also das Maximum des Indexes, wo in jeder freien Auflösung ein Modul $\neq 0$ stehen muss. Ein endlich erzeugter freier Modul $\neq M$ besitzt demnach die projektive Dimension 0, der Nullmodul die projektive Dimension -1 . Zu einem Nichtnullteiler $f \in \mathfrak{m}$ besitzt der Restklassenmodul $R/(f)$ die projektive Dimension 1, da eine freie Auflösung

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f} R \longrightarrow R/(f) \longrightarrow 0$$

vorliegt, und $R/(f)$ selbst nicht frei ist.

BEISPIEL 23.17. Es sei R ein zweidimensionaler lokaler regulärer Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (x, y)$. Dann ist

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{(x, y)} R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{m}$. Dieser besitzt also die projektive Dimension 2. Die einzige Stelle, an der die Exaktheit nicht direkt klar ist, ist für R^2 . Seien $(a, b) \in R^2$ mit $ax + by = 0$. Dies bedeutet $ax = -by$ und dies bedeutet $ax = 0$ in $R/(y)$. Nach Lemma 21.4 ist dies ein regulärer Ring der Dimension 1 und x erzeugt darin das maximale Ideal. Wegen Satz 21.5 ist $R/(y)$ ein Integritätsbereich und somit ist dort $a = 0$. Dies heißt zurückübersetzt nach R , dass $a = cy$ ist. Da y ein Nichtnullteiler in R ist, folgt $b = -cx$ und somit ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

LEMMA 23.18. Es sei R ein lokaler noetherscher Ring und $L = M \oplus N$ ein endlich erzeugter R -Modul mit einer endlichen projektiven Dimension. Dann besitzen auch die direkten Summanden M und N eine endliche projektive Dimension, die höchstens so groß wie die von L ist.

Beweis. Wir führen Induktion über die projektive Dimension von L . Wenn diese gleich 0 ist, so bedeutet dies, dass L frei ist. Doch dann sind M und N als direkte Summanden projektiv und somit nach Lemma 23.6 selbst frei. Sei

die Aussage nun für endliche projektive Dimension e bewiesen und $M \oplus N$ habe die projektive Dimension $e + 1$. Es sei

$$R^n \longrightarrow M \oplus N$$

surjektiv und minimal. Dabei kann man annehmen, dass dies von surjektiven Abbildungen $R^{n_1} \rightarrow M$ und $R^{n_2} \rightarrow N$ mit $n_1 + n_2 = n$ herrührt. Dann ist der Kern davon von der Form $M' \oplus N'$ und man kann darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. $\square$

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 11
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 11