Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 21

Reguläre Ringe

Definition 21.1. Ein noetherscher lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ der Dimension n heißt *regulär*, wenn es n Elemente $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$ gibt, die das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugen.

Ein regulärer nulldimensionaler lokaler Ring ist einfach ein Körper. Eindimensionale reguläre lokale Ringe nennt man auch diskrete Bewertungsringe. In ihnen wird das maximale Ideal durch ein Element $\neq 0$ erzeugt.

Beispiel 21.2. Zu einem Körper K und Variablen $X_1, \ldots, X_n$ ist die Lokalisierung

$$K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$$

ein lokaler regulärer Ring. Er besitzt die Dimension n und das maximale Ideal wird eben durch $X_1, \ldots, X_n$ erzeugt.

Wenn $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ ist, so ist auch die Lokalisierung des Polynomrings am maximalen Ideal $(X - a_1, \ldots, X - a_n)$ regulär, und zwar isomorph zur Lokalisierung im Nullpunkt $(0, \ldots, 0)$. Es ist schwieriger zu zeigen, dass überhaupt die Lokalisierung an jedem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

ein lokaler regulärer Ring der Dimension n ist, siehe Aufgabe 21.12.

Beispiel 21.3. Wir betrachten die Neilsche Parabel $V = V(X^2 - Y^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$. In jedem Punkt $P \in V$ ist die Einbettungsdimension des lokalen Ringes

$$\mathcal{O}_P = K[X, Y]_{\mathfrak{n}_P} / \left(X^2 - Y^3\right)$$

höchstens 2, da dies für $K[X, Y]_{\mathfrak{m}_P}$ gilt. Dabei ist $\mathfrak{n}_P$ das zugehörige maximale Ideal im Polynomring und $\mathfrak{m}_P$ sei das maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_P$. Es gilt

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 = \mathfrak{n}_P / \left(\mathfrak{n}_P^2 + \left(X^2 - Y^3\right)\right).$$

Bei $P = (0, 0)$ ist $\mathfrak{n}_P = (X, Y)$ und $X^2 - Y^3 \in \mathfrak{n}_P^2$, also ist

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 = \mathfrak{n}_P / \left(\mathfrak{n}_P^2 + \left(X^2 - Y^3\right)\right) = \mathfrak{n}_P / \mathfrak{n}_P^2 = K^2$$

und die Einbettungsdimension ist 2. Der lokale Ring im Nullpunkt ist also nicht regulär. Im Punkt $Q = (1,1)$ ist $\mathfrak{n}_Q = (X-1, Y-1)$ und wir schreiben $X^2 - Y^3 = (X-1)(X+1) - (Y-1)(Y^2+Y+1)$. In $\mathcal{O}_Q$ gilt daher

$$X - 1 = \frac{Y^2+Y+1}{X+1}(Y-1),$$

wobei eben die rationale Funktion zu $\mathcal{O}_Q$ gehört. Daher ist dort

$$\mathfrak{m}_Q = (Y-1)$$

und die Einbettungsdimension ist 1. Der lokale Ring in $(1,1)$ ist also regulär.

Lemma 21.4. *Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler regulärer Ring der Dimension d und seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$ Elemente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt Elemente $f_{n+1}, \ldots, f_d$ mit $(f_1, \ldots, f_d) = \mathfrak{m}$.*
(2) *Die Restklassen von $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind linear unabhängig über $K = R/\mathfrak{m}$.*
(3) *Der Restklassenring $R/(f_1, \ldots, f_n)$ ist regulär der Dimension $d-n$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Äquivalenz zwischen (1) und (2). Der Restklassenmodul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum, der nach dem Lemma von Nakayama die Dimension d besitzt. Wenn

$$(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_d) = \mathfrak{m}$$

ist, so bilden die Restklassen eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ und jedes Teilsystem davon ist linear unabhängig. Wenn umgekehrt die Restklasen von $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ linear unabhängig sind, so lassen diese sich nach dem Basisergänzungssatz durch $g_{n+1}, \ldots, g_d \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ zu einer Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ergänzen. Diese Elemente werden wiederum durch Elemente $f_{n+1}, \ldots, f_d \in \mathfrak{m}$ repräsentiert, und nach dem Lemma von Nakayama gilt

$$(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_d) = \mathfrak{m}.$$

Wir beweisen nun die Äquivalenz zwischen (1) und (3). Wir setzen

$$\mathfrak{a} := (f_1, \ldots, f_n).$$

Sei zunächst wieder durch $f_{n+1}, \ldots, f_d$ eine Ergänzung zu einem vollen Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ gegeben. Dann sind die Restklassen von $f_{n+1}, \ldots, f_d$ in $R/\mathfrak{a}$ ein Erzeugendensystem des maximalen Ideals

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$$

von $R/\mathfrak{a}$. Damit ist die Einbettungsdimension von $R/\mathfrak{a}$ gleich $d-n$ und somit ist nach Satz 20.12 die Dimension von $R/\mathfrak{a}$ höchstens $d-n$. Andererseits ist die Dimension aber auch zumindest $d-n$ nach Korollar 18.9. Wäre nämlich die Dimension von $R/\mathfrak{a}$ gleich

$$m < d-n,$$

so würde es Parameter

$$g_1, \ldots, g_m \in R/\mathfrak{a}$$

geben, und diese würden zusammen mit den $f_1, \ldots, f_n$ in R das maximale Ideal als Radikal beschreiben, was nach Satz 18.7 nicht sein kann.

Wenn umgekehrt $R/\mathfrak{a}$ regulär der Dimension $d - n$ ist, so sei

$$\mathfrak{n} = (g_{n+1}, \ldots, g_d).$$

Diese g_i werden durch $f_{n+1}, \ldots, f_d \in \mathfrak{m}$ repräsentiert und die $f_1, \ldots, f_n$ erzeugen $\mathfrak{m}$. $\square$

Satz 21.5. *Ein regulärer lokaler Ring ist ein Integritätsbereich.*

Beweis. Wir führen Induktion über die Dimension d von R. Bei $d = 0$ ist $\mathfrak{m} = 0$ und es liegt ein Körper vor. Sei die Aussage für reguläre Ringe kleinerer Dimension schon bewiesen. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von R. Es ist $n = 1$ und $\mathfrak{p}_1 = 0$ zu zeigen. Wir wenden Lemma Anhang 15.2 auf diese Primideale und auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}^2$ an. Es ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$, da die Dimension zumindest 1 ist, und es ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, denn sonst wäre $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$. Somit ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, d.h. es gibt ein $h \in \mathfrak{m}$, das in keinem minimalen Primideal und nicht in $\mathfrak{m}^2$ enthalten ist. Nach Lemma 21.4 ist $R/(h)$ ein regulärer Ring der Dimension $d - 1$, es ist also ein Integritätsbereich nach Induktionsvoraussetzung. Somit ist das Hauptideal (h) ein Primideal in R. Da jedes Primideal ein minimales Primideal umfasst, gilt

$$\mathfrak{p}_i \subseteq (h)$$

für ein i, und die Inklusion muss nach der Wahl von h echt sein. Somit muss

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} \cdot (h)$$

mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ sein. Aus der Primeigenschaft in Verbindung mit $h \notin \mathfrak{p}_i$ folgt

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$$

und somit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_i.$$

Die Gleichheit

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i \cdot (h)$$

erzwingt aber nach dem Lemma von Nakayama $\mathfrak{p}_i = 0$. $\square$

Reguläre Ringe und glatte Punkte

Satz 21.6. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper*

$$P \in V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

ein Punkt der affin-algebraischen Menge zum Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ mit dem lokalen Ring

$$R = (K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}_P}.$$

Dann ist der Punkt genau dann glatt, wenn R regulär ist.

Beweis. Ohne Einschränkung sei P der Nullpunkt mit dem zugehörigen maximalen Ideal $\mathfrak{n} = (X_1, \ldots, X_n)$ im Polynomring, dem zugehörigen maximalen Ideal $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ in $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ und dem zugehörigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P = \mathfrak{r}(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{r}}$ in R. Wir betrachten die K-lineare Abbildung

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K^n,\ g \longmapsto ((\partial_1 g)(P), \ldots, (\partial_n g)(P)).$$

Dabei werden die Variablen X_i auf die Standardvektoren e_i abgebildet und die Abbildung ist surjektiv. Ein Element

$$g = c_0 + c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n + \text{ höhere Terme}$$

wird auf $(c_1, \ldots, c_n)$ abgebildet. Ein homogenes Element

$$g \in \mathfrak{n}^2 = K[X_1, \ldots, X_n]_{\geq 2}$$

besitzt zumindest den Grad 2 und wird daher auf 0 abgebildet, da die partiellen Ableitungen den Grad um 1 reduzieren und somit ergibt sich jeweils ein Element von positivem Grad. Durch Einsetzen des Nullpunktes ergibt sich dann 0. Insgesamt induziert dies eine K-lineare Abbildung

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow K^n,$$

die bijektiv ist, da die Räume die gleiche Vektorraumdimension besitzen.

Nach Lemma 18.9 ist $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Unter der surjektiven Abbildung

$$\mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$$

wird $\mathfrak{n}^2$ und $\mathfrak{a}$ auf 0 abgebildet, und zwar ist der Kern genau $\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{a}$. Somit gibt es eine K-lineare Bijektion

$$\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{a}) \longrightarrow \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2.$$

Wir betrachten die Abildungen

$$K^m \xrightarrow{\text{Jak}} K^n \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \mathfrak{n}/\left(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{a}\right).$$

Ein Element $[g] \in \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ wird rechts genau dann auf 0 geschickt, wenn der lineare Anteil von g zu $\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{a}$ gehört. Dies bedeutet, dass eine Gleichung der Form

$$g = \sum_{i=1}^{m} h_i f_i$$

modulo $\mathfrak{n}^2$ besteht und dies bedeutet (für die h_i ist nur der konstante Term relevant), dass eine lineare Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 g)(P) \\ \vdots \\ (\partial_n g)(P) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} h_i \begin{pmatrix} (\partial_1 f_i)(P) \\ \vdots \\ (\partial_n f_i)(P) \end{pmatrix}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} (\partial_1 g)(P) \\ \vdots \\ (\partial_n g)(P) \end{pmatrix}$ im Bild der Jacobimatrix liegt. Daher ist das Bild der Jacobimatrix gleich dem Kern der surjektiven Abbildung rechts. Somit ist nach der Dimensionsformel

$$n = \operatorname{rang}(\mathrm{Jak}) + \dim_K \left(\mathfrak{n}/\left(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{a}\right)\right) = \operatorname{rang}(\mathrm{Jak}) + \dim_K \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right).$$

Es sei nun d die Dimension von $V(\mathfrak{a})$ im Punkt P, die mit der Dimension des lokalen Ringes R übereinstimmt. Nach Definition ist P genau dann nichtsingulär, wenn $n = \operatorname{rang}(\mathrm{Jak}) + d$ ist. Dies ist daher genau dann der Fall, wenn

$$\dim_K \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = d$$

ist, und dies ist die Definition eines regulären Ringes. □

Satz 21.7. *Es sei K ein vollkommener Körper und R die Lokalisierung einer endlich erzeugten K-Algebra. Der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ sei isomorph zu K. Dann ist R genau dann regulär, wenn der Modul der Kähler-Differentiale frei ist und sein Rang mit der Dimension des Ringes übereinstimmt.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 13.5, also den natürlichen $R/\mathfrak{m}$-Isomorphismus

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto df \otimes 1.$$

Wenn $\Omega_{R|K}$ ein freier R-Modul und sein Rang gleich der Dimension d ist, so gilt dies auch für den $R/\mathfrak{m}$-Modul $\Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m}$ und dann ist insbesondere $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein d-dimensionaler $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Dies bedeutet nach Definition, dass R regulär ist. Umgekehrt folgt aus der Regularität, dass $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ und entsprechend $\Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ein d-dimensionaler Vektorraum ist, und nach dem Lemma von Nakayama, dass $\Omega_{R|K}$ als R-Modul von d Elementen erzeugt wird. Nach Satz 21.5 ist R ein Integritätsbereich, sei $Q(R)$ sein Quotientenkörper. Nach Satz 19.7 ist der Transzendenzgrad von $Q(R)$ über K gleich der Dimension von R. Da der Modul der Kähler-Differentiale mit Nenneraufnahmen verträglich ist, gilt

$$\Omega_{R|K} \otimes_R Q(R) = \Omega_{Q(R)|K}.$$

Da K vollkommen ist, ist die Körpererweiterung $K \subseteq Q(R)$ nach Satz Anhang 15.4 (nicht endlich, aber) separabel. Damit ist $\Omega_{Q(R)|K}$ ein freier $Q(R)$-Modul, dessen Rang gleich dem Transzendenzgrad ist. Zusammenfassend besitzt also der R-Modul $\Omega_{Q(R)|K}$ die Eigenschaft, dass er von d Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_d$ erzeugt wird und dass die Tensorierung mit $Q(R)$ ein $Q(R)$-Vektorraum der Dimension d ist. Somit müssen die $\omega_1, \ldots, \omega_d$ R-linear unabhängig sein, da sie dies über $Q(R)$ sind, und daher handelt es sich um eine Basis. Also ist $\Omega_{R|K}$ frei vom Rang d. □

Reguläre Ringe und Multiplizität

Satz 21.8. *Es sei R ein lokaler noetherscher Ring. Dann ist R genau dann regulär, wenn der assoziierte graduierte Ring $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} R$ ein Polynomring über $R/\mathfrak{m}$ in $\dim(R)$ Variablen ist.*

Beweis. Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ sei durch die Erzeuger $f_1, \ldots, f_e$ gegeben, wobei e die Einbettungsdimension von R bezeichnet. Dazu gehört ein surjektiver graduierter $R/\mathfrak{m}$-Algebrahomomorphismus

$$R/\mathfrak{m}[X_1, \ldots, X_e] \longrightarrow \operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} R = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \ldots, \; X_i \longmapsto [f_i],$$

($[f_i]$ bezeichnet die Klasse von f_i in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$). Es steht links ein Ring der Dimension e und rechts nach Satz 19.10 bzw. der graduierten Version davon ein Ring der Dimension $d = \dim(R)$. Wenn R regulär ist, so ist $d = e$ und der Kern muss trivial sein, da echte Restklassenringe eines Integritätsbereiches eine kleinere Dimension besitzen. Wenn umgekehrt ein Isomorphismus vorliegt, so muss $d = e$ sein. □

Korollar 21.9. *Die Hilbert-Samuel-Multiplizität eines lokalen regulären Ringes ist 1.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 21.8 in Verbindung mit Satz 16.13. □

Beispiel 21.10. Wir betrachten den lokalen Ring

$$R = K[X, Y, Z]_{(X,Y,Z)}/(XY, XZ),$$

der geometrisch aus einer Ebene und einer Geraden besteht. Für die Potenzen des maximalen Ideals $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ gilt

$$\mathfrak{m}^n = (X^n) + (Y, Z)^n,$$

da ja sämtliche Monome, in denen neben X noch eine weitere Variable vorkommt, gleich 0 sind. Somit gilt für die Restklassenräume

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = K\langle X^n, Y^n, Y^{n-1}Z, \ldots, Z^n\rangle$$

und dessen K-Dimension ist $n + 2$. Somit ist die Hilbert-Samuel-Funktion des Ringes gleich $H_R(n) = n + 2$ und die Hilbert-Samuel-Multiplizität des Ringes ist 1. Der Ring ist aber nicht regulär.

Abbildungsverzeichnis