

Singularitätentheorie

Vorlesung 19

Dimension von endlich erzeugte Algebren

SATZ 19.1. *Der Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ über einem Körper K besitzt die Krulldimension n . Jedes maximale Ideal des Polynomrings besitzt die Höhe n .*

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{m} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Dann zeigt einerseits die Primidealkette

$$0 \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

dass die Höhe von $\mathfrak{m}$ zumindest n ist. Da das Ideal n Erzeuger besitzt, folgt andererseits aus Satz 18.7, dass die Höhe von $\mathfrak{m}$ höchstens gleich n ist. Die Höhe ist also genau n .

Wenn ein maximales Ideal der Form

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

(also ein Punktideal) mit $a_i \in K$ vorliegt, so zeigt die gleiche Argumentation, dass seine Höhe gleich n ist (oder man arbeitet mit einem K -Algebraautomorphismus von $K[X_1, \dots, X_n]$, der $\mathfrak{m}$ in $(X_1, \dots, X_n)$ überführt.). Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so sind wir nach Satz Anhang 2.6 fertig.

Wenn K ein beliebiger Körper ist, so gibt es eine ganze Körpererweiterung $K \subseteq \overline{K}$ mit $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen. Die Erweiterung

$$K[X_1, \dots, X_n] \subseteq \overline{K}[X_1, \dots, X_n]$$

ist ebenfalls ganz. Sei $\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal. Dazu gibt es nach Lemma Anhang 12.2 und Lemma Anhang 12.5 ein maximales Punktideal

$$\mathfrak{n} \subseteq \overline{K}[X_1, \dots, X_n],$$

das auf $\mathfrak{m}$ runterschneidet. Eine Primidealkette unterhalb von $\mathfrak{n}$ der Länge n schneidet auf eine Primidealkette unterhalb von $\mathfrak{m}$ runter, so dass die Höhe von $\mathfrak{m}$ zumindest n ist. Umgekehrt gibt es zu einer Primidealkette unterhalb von $\mathfrak{m}$ nach Lemma Anhang 12.1 eine darüberliegende Primidealkette in $\overline{K}[X_1, \dots, X_n]$. Da eine solche maximal die Länge n besitzt, ist die Höhe von $\mathfrak{m}$ gleich n . $\square$

Ohne Beweis erwähnen wir den folgenden Satz.

SATZ 19.2. *Es sei R ein noetherscher Ring der Dimension d . Dann besitzt der Polynomring $R[X]$ die Dimension $d + 1$.*

SATZ 19.3. *Es sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom $\neq 0$ über einem Körper K . Dann besitzt der Restklassenring $K[X_1, \dots, X_n]/(F)$ die Dimension $n - 1$.*

Beweis. Nach Satz Anhang 13.1 gibt es eine endliche Erweiterung

$$K[Y_1, \dots, Y_{n-1}] \subseteq K[X_1, \dots, X_n]/(F).$$

Nach Satz Anhang 12.6 stimmen die Dimensionen der beiden Ringe überein. Also hat der Hyperflächenring die gleiche Dimension wie der Polynomring in $n - 1$ Variablen, die nach Satz 19.1 gleich $n - 1$ ist. $\square$

SATZ 19.4. *Es sei R eine integrale K -Algebra vom endlichen Typ über einem Körper K . Dann besitzt jede maximale Primidealkette in R die gleiche Länge.*

Beweis. Es sei d die Dimension von R , wir führen Induktion über d . Bei $d = 0$ ist die Aussage klar. Zum Induktionsschluss sei

$$0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$$

eine maximale Primidealkette in R . Nach Satz Anhang 13.2 gibt es eine endliche Erweiterung

$$K[Y_1, \dots, Y_d] \subseteq R.$$

Wir betrachten

$$\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{p}_1 \cap K[Y_1, \dots, Y_d].$$

Nach Aufgabe 19.9 ist $\mathfrak{q}_1$ nicht das Nullideal. Würde es ein Primideal

$$0 \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_1$$

geben, so würde es dazu nach Satz Anhang 12.7 eine Primidealkette

$$0 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1$$

geben, die darüber liegt, und dann wäre die Kette nicht maximal. Das bedeutet, dass $\mathfrak{q}_1$ die Höhe 1 besitzt. Da der Polynomring faktoriell ist, ist

$$\mathfrak{q}_1 = (F)$$

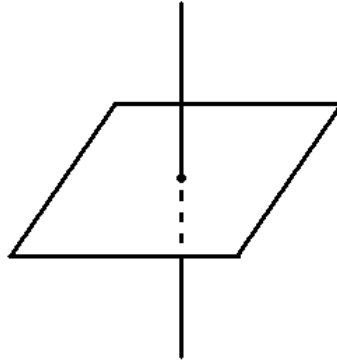
ein Primhauptideal und somit ist nach Satz 19.3 die Dimension von $K[Y_1, \dots, Y_d]/(F)$ gleich $d - 1$. Da die induzierte Abbildung

$$K[Y_1, \dots, Y_d]/(F) \longrightarrow R/\mathfrak{p}_1$$

ebenfalls endlich und injektiv ist, folgt nach Satz Anhang 12.6, dass die Dimension von $R/\mathfrak{p}_1$ gleich $d - 1$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt jede maximale Primidealkette in $R/\mathfrak{p}_1$ die Länge $d - 1$. Unsere Primidealkette induziert (startend mit $\mathfrak{p}_1$) eine maximale Primidealkette in $R/\mathfrak{p}_1$, also ist

$$n - 1 = d - 1$$

und daher $n = d$. □



In der vorstehenden Aussage ist die Voraussetzung der Integrität notwendig, wie jedes Beispiel zeigt, in dem die maximalen Komponenten nicht die gleiche Dimension haben. Aber auch die Voraussetzung, dass die Algebra vom endlichen Typ ist, ist entscheidend.

BEISPIEL 19.5. Wir betrachten den Polynomring $K[X, Y]$ über einem Körper K mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X, Y)$ und dem Primideal $\mathfrak{p} = (X - 1)$, das nicht in $\mathfrak{m}$ liegt. Wir betrachten das multiplikative System

$$S = \{f \in K[X, Y] \mid f \notin \mathfrak{m} \text{ und } f \notin \mathfrak{p}\} = K[X, Y] \setminus \mathfrak{m} \cap K[X, Y] \setminus \mathfrak{p}.$$

In der Nenneraufnahme $R = K[X, Y]_S$ sind die Primideale $\mathfrak{m}R$ und $\mathfrak{p}R$ die einzigen maximalen Ideale, das eine hat die Höhe 2 und das andere die Höhe 1. Die Aussage Satz 19.4 gilt also nicht für integrale Algebren, die im Wesentlichen vom endlichen Typ sind.

KOROLLAR 19.6. *Es sei R eine integrale K -Algebra vom endlichen Typ über einem Körper K und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist*

$$\dim(R) = \dim(\mathfrak{p}) + \text{ht}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 19.4. □

Die folgende Aussage setzt die Dimension einer integralen Algebra vom endlichen Typ in Beziehung zum Transzendenzgrad des zugehörigen Quotientenkörpers. Für den Begriff Transzendenzgrad und seine wichtigsten Eigenschaften siehe die Vorlesung zur Galoistheorie.

SATZ 19.7. *Es sei R eine integrale K -Algebra vom endlichen Typ über einem Körper K mit dem Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Dann stimmt die Dimension von R mit dem Transzendenzgrad von Q über K überein.*

Beweis. Nach Satz Anhang 13.2 gibt es algebraisch unabhängige Elemente $f_1, \dots, f_n \in R$ derart, dass

$$K[f_1, \dots, f_n] \subseteq R$$

endlich ist. Dann ist auch die Körpererweiterung der Quotientenkörper

$$Q(K[f_1, \dots, f_n]) = K(f_1, \dots, f_n) \cong K(T_1, \dots, T_n) \subseteq Q(R)$$

endlich. Also ist n nach Definition der Transzendenzgrad. $\square$

KOROLLAR 19.8. *Es sei R eine integrale K -Algebra vom endlichen Typ über einem Körper K und $f \in R$ ein von 0 verschiedenes Element. Dann stimmt die Dimension der Nenneraufnahme R_f mit der Dimension von R überein.*

Beweis. Der Quotientenkörper von R_f stimmt mit dem Quotientenkörper von R überein. Da mit R auch R_f von endlichem Typ über K ist, folgt die Aussage aus Satz 19.7. $\square$

Der Grad des Hilbert-Samuel Polynoms

DEFINITION 19.9. Zu einem R -Modul M versteht man unter der *Krulldimension* von M die Krulldimension von $R/\text{Ann}_R M$.

SATZ 19.10. *Es sei R ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann besteht zwischen der Dimension des Moduls und dem Grad des Hilbert-Samuel-Polynoms P_M der Zusammenhang*

$$\dim(M) = \text{grad}(P_M) + 1.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Non cohen macaulay scheme thumb.png , Autor = Benutzer Jakob.scholbach auf en.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	5
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	5