Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2019

Singularitätentheorie

Vorlesung 18

Die Krulldimension

Zu einen n-dimensionalen Vektorraum nennt man eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V. Dabei ist notwendigerweise die Dimension von V_i gleich i und die Kette ist nicht verfeinerbar, d.h. zwischen V_i und V_{i+1} gibt es keinen echten Untervektorraum. Von daher kann man sagen, dass die Dimension eines Vektorraumes durch die maximale Länge von Ketten von Untervektorräumen gegeben ist. Wir werden in analoger Weise die Dimension einer affinen Varietät bzw. ihres Koordinatenring und allgemeiner eines beliebigen noetherschen Ringes einführen. Wichtige strukturelle Eigenschaften für einen sinnvollen Dimensionsbegriff haben wir schon in der dritten Vorlesung formuliert.

Bei einer affinen Varietät

$$V = V(\mathfrak{a}) \subseteq K^n$$

kann man nicht von Untervektorräumen sprechen. Vielmehr sind die abgeschlossenen Untervarietäten (Nullstellengebilde) von $V(\mathfrak{a})$ die strukturgleichen Unterobjekte. Wenn man allerdings die Gerade über einem unendlichen Körper K betrachtet, so sind sämtliche endlichen Teilmengen abgeschlossen und daher gibt es beliebig lange Ketten der Form

$$\{P_1\} \subset \{P_1, P_2\} \subset \{P_1, P_2, P_3\} \subset \ldots \subset \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n\} \subset \ldots \subset K.$$

Eine sinnvolle Dimensionstheorie lässt sich aufbauen, wenn man statt Ketten von beliebigen abgeschlossenen Teilmengen nur Ketten von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen nimmt. Man betrachtet also Ketten

$$V_0 = \{P\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subseteq V$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen V_i in V. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper entsprechen sich irreduzible Varietäten und Primideale gemäß Lemma 2.14. Von daher ist die folgende Definition für einen beliebigen Ring nicht mehr überraschend.

Definition 18.1. Sei R ein kommutativer Ring. Eine Kette aus Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

nennt man *Primidealkette der Länge* n (es wird also die Anzahl der Inklusionen gezählt, nicht die Anzahl der beteiligten Primideale). Die *Dimension* (oder *Krulldimension*) von R ist das Supremum über alle Längen von Primidealketten. Sie wird mit $\dim(R)$ bezeichnet.

Unter einer maximalen Primidealkette verstehen wir eine nicht weiter verfeinerbare Primidealkette, d.h. zu $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ gibt es kein echtes Primideal dazwischen. Eine solche maximale Primidealkette ist nicht ohne weitere Voraussetzung eine Primidealkette maximaler Länge, an lezteren kann man eben die Krulldimension ablesen. Eine jede maximale Primidealkette startet in einem minimalen Primideal und endet in einem maximalen Ideal. Bei einem Integritätsbereich ist das Nullideal das einzige minimale Primideal. Ein Körper hat die Krulldimension 0 (seine Vektorraumdimension über K ist aber 1). Ein Hauptidealbereich, der kein Körper ist, besitzt die Krulldimension 1, siehe Aufgabe 18.4. Im Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K hat man direkt die Primidealkette

$$0 \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \ldots \subset (X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

so dass die Dimension des Polynomringes zumindest n ist. Es ist aber keineswegs klar, warum es nicht noch längere Ketten geben kann.

Definition 18.2. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Unter der *Dimension* von $\mathfrak{p}$ versteht man das Supremum der Länge m von Primidealketten

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_m.$$

Lemma 18.3. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist die Dimension von $\mathfrak{p}$ gleich der Dimension des Restklasssenringes $R/\mathfrak{p}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.5. □

Definition 18.4. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Unter der *Höhe* von $\mathfrak{p}$ versteht man das Supremum der Länge n von Primidealketten

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

Lemma 18.5. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist die Höhe von $\mathfrak{p}$ gleich der Dimension der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.6. □

Der folgende Satz heißt Krullscher Hauptidealsatz. Sein Beweis verwendet unter Anderem symbolische Potenzen.

Zu einem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ in einem kommutativen Ring nennt man

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R$$

die n-te *symbolische Potenz* von $\mathfrak{p}$.

Satz 18.6. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $f \in R$. Dann besitzt jedes Primideal $\mathfrak{p}$, das oberhalb von (f) liegt und minimal mit dieser Eigenschaft ist, eine Höhe ≤ 1.*

Beweis. Es sei $f \in \mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal. Wir können an $\mathfrak{q}$ lokalisieren. Dann ist zu zeigen, dass ein lokaler noetherscher Ring, in dem das maximale Ideal minimal über einem Element f ist, die Dimension 0 oder 1 besitzt. Da eine Primidealkette mit einem Primideal beginnt, können wir weiterhin annehmen, dass ein noetherscher lokaler Integritätsbereich vorliegt. Sei jetzt angenommen, dass eine Primidealkette

$$0 \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$$

vorliegt und dass $\mathfrak{m}$ minimal über $f \neq 0$ ist. Es ist $\mathfrak{p} = 0$ zu zeigen. Der Restklassenring $R/(f)$ ist noethersch und besitzt die Dimension 0, da ja darin $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal ist. Somit ist nach Aufgabe 18.7 der Ring $R/(f)$ auch artinsch, d.h. jede absteigende Idealkette in $R/(f)$ wird stationär. Dies bedeutet wiederum, dass jede absteigende Idealkette in R oberhalb von Rf stationär wird. Wir betrachten die absteigende Idealkette

$$\mathfrak{p}^{(1)} + Rf \supseteq \mathfrak{p}^{(2)} + Rf \supseteq \mathfrak{p}^{(3)} + Rf \subseteq \ldots$$

in R, wobei wir symbolische Potenzen verwenden, und die entsprechende absteigende Kette in $R/(f)$. Da dieser Ring artinsch ist, wird diese Kette konstant, d.h. es gibt ein n mit

$$\mathfrak{p}^{(n)} + Rf = \mathfrak{p}^{(n+1)} + Rf.$$

Wir behaupten, dass sogar

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n+1)} + \mathfrak{p}^{(n)} f$$

gilt, wobei die Inklusion $\supseteq$ klar ist. Sei also $g \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Wegen der ersten Gleichung ist

$$g = h + rf$$

mit $h \in \mathfrak{p}^{(n+1)}$. Wegen $f \notin \mathfrak{p}$ ist

$$r = \frac{g-h}{f} \in \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}^{(n)}.$$

Die zuletzt bewiesene Gleichheit ergibt modulo $\mathfrak{p}^{(n+1)}$ die Beziehung

$$\mathfrak{p}^{(n)}/\mathfrak{p}^{(n+1)} = \left(\mathfrak{p}^{(n)}/\mathfrak{p}^{(n+1)}\right) \cdot (f).$$

Dies bedeutet wiederum

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n+1)}$$

nach dem Lemma von Nakayama. Dies bedeutet in $R_{\mathfrak{p}}$

$$(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n = (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^{n+1}.$$

Dies ergibt aber, wieder nach einer Version des Lemmas von Nakyama (siehe Aufgabe 18.9), zunächst

$$(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n = 0$$

und, da R integer ist,

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$$

und somit $\mathfrak{p} = 0$. $\square$

Die im Satz angesprochenen Primideale nennt man auch die minimalen Primoberideale zu f. Sie sind typischerweise in R keine minimalen Primideale, sondern sie entsprechen den minimalen Primidealen im Restklassenring $R/(f)$. Wenn R ein noetherscher Integritätsbereich und $f \neq 0$ ist, so bedeutet die Aussage, dass die minimalen Primoberideale zu f die Höhe 1 besitzen.

Satz 18.7. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $f_1, \ldots, f_n \in R$. Dann besitzt jedes Primideal $\mathfrak{p}$, das oberhalb von $(f_1, \ldots, f_n)$ liegt und minimal mit dieser Eigenschaft ist, eine Höhe $\leq n$.*

Beweis. Wir führen Induktion über n, der Fall $n = 0$ ist trivial und der Fall $n = 1$ ist der Krullsche Hauptidealsatz. Es sei $\mathfrak{p}$ das in Frage stehende Primideal. Wir können zur Lokalisierung übergehen und erhalten einen lokalen noetherschen Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, das (als Primideal) minimal über

$$(f_1, \ldots, f_n) \subseteq \mathfrak{m}$$

ist. Insbesondere ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primoberideal von $(f_1, \ldots, f_n)$. Es ist zu zeigen, dass die Dimension des Ringes höchstens n ist. Sei

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_{k-1} \subset \mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}$$

eine Primidealkette. Es sei i so gewählt, dass $\mathfrak{m}$ kein minimales Primideal über $\mathfrak{p}_{k-1} + (f_1, \ldots, f_{i-1})$, aber ein minimales Primideal über $\mathfrak{p}_{k-1} + (f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i)$ ist. Dabei ist i zwischen 1 und n. Wir betrachten die Situation modulo $\mathfrak{p}_{k-1}+(f_1, \ldots, f_{i-1})$. Das Primideal $\mathfrak{m}$ ist in $R/\mathfrak{p}_{k-1}+(f_1, \ldots, f_{i-1})$ ein minimales Primoberideal zu (f_i). Nach dem Krullschen Hauptidealsatz besitzt $\mathfrak{m}$ in diesem Ring die Höhe 1 (die Höhe 0 ist wegen der Nichtminimalität ausgeschlossen). Es sei $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal

$$\mathfrak{p}_{k-1} + (f_1, \ldots, f_{i-1}) \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}.$$

Da $\mathfrak{m}$ minimal über $\mathfrak{q} + (f_i)$ ist, besitzen diese beiden Ideale das gleiche Radikal. D.h. es gibt einen Exponenten m derart, dass $f_j^m \in \mathfrak{q} + (f_i)$ für alle j gilt. Wir schreiben dies für $j \neq i$ als $f_j^m = g_j + h_j f_i$ mit $g_j \in \mathfrak{q}$. Wir betrachten das Ideal

$$(g_j,\, j \neq i) \subseteq \mathfrak{q}.$$

Dabei muss $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal sein, da $\mathfrak{m}$ ein minimales Primoberideal zu $(g_j,\, j \neq i) + (f_i)$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Höhe von $\mathfrak{q}$ höchstens $n - 1$ und somit ist die Höhe von $\mathfrak{m}$ höchstens n. $\square$

Satz 18.8. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal der Höhe d. Dann gibt es Elemente*

$$f_1, \ldots, f_d \subseteq \mathfrak{p}$$

derart, dass $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal über $(f_1, \ldots, f_d)$ ist.

Beweis. Wir führen Induktion nach d, bei $d = 0$ liegt ein minimales Primideal (über 0) vor. Sei $d \geq 1$ und die Aussage für kleinere Höhen bewiesen. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von R, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Dann gibt es nach Lemma Anhang 15.1 ein

$$f \in \mathfrak{p} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j .$$

Wir betrachten das Primideal $\mathfrak{p}$ in $R/(f)$. Da in $R/(f)$ nach Konstruktion die minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ nicht überleben, besitzt $\mathfrak{p}$ dort eine Höhe $\leq d-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $g_1, \ldots, g_{d-1} \in R/(f)$, über denen $\mathfrak{p}$ minimal ist. Seien f_j Repräsentenaten der g_j. Dann ist $\mathfrak{p}$ in R minimal über $f_1, \ldots, f_{d-1}, f$. □

Korollar 18.9. *Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension d. Dann gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_d \in \mathfrak{m}$ mit*

$$\operatorname{rad}(f_1, \ldots, f_d) = \mathfrak{m}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 18.8. □

Elemente $f_1, \ldots, f_d$ nennt man auch *Parameter* des lokalen Ringes. Geometrisch (d.h. bis auf das Radikal) kann man also in jedem lokalen noetherschen Ring das maximale Ideal durch d Elemente beschreiben.

Abbildungsverzeichnis