Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 17

Assoziierter graduierter Ring

Definition 17.1. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in einem kommutativen Ring R nennt man die direkte Summe von $R/\mathfrak{a}$-Moduln

$$\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} R = R/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \ldots$$

mit der durch $[f] \cdot [g] := [fg]$ gegebenen Multiplikation den *assoziierten graduierten Ring* zu $\mathfrak{a}$.

Diese Verknüpfung ist wohldefiniert. Der assoziierte graduierte Ring ist $\mathbb{N}$-graduiert und von der ersten Stufe erzeugt. Diese Konstruktion erlaubt es häufig, Fragen für einen beliebigen kommutativen Ring auf eine graduierte Situation zurückzuführen. Wenn $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes Ideal ist, so ist der graduierte Ring als Algebra endlich erzeugt, und zwar liefert ein Modulerzeugendensystem von $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ ein Algebraerzeugendensystem, siehe Aufgabe 17.4. Wenn R ein noetherscher lokaler Ring ist und man das maximale Ideale $\mathfrak{m}$ nimmt, so erhält man eine standard-graduierte Algebra mit dem Restekörper $R/\mathfrak{m}$ als nullte Stufe.

Beispiel 17.2. Zum Ring der Neilschen Parabel, also zu

$$R = K[X,Y]/\left(X^2 - Y^3\right)$$

mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X,Y)$, kann man den assoziierten graduierten Ring wie folgt berechnen. Es gibt eine surjektive Abbildung

$$\varphi\colon K[S,T] \longrightarrow \operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} R,$$

die S auf die Restklasse von X und T auf die Restklasse von Y in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ abbildet. Dabei ist

$$\varphi\left(S^2\right) = [X]^2 = [X^2] = [Y^3] = 0,$$

da ja die dritte Potenz von Y zu $\mathfrak{m}^3$ gehört. Da die Monome X^iY^j mit $i = 0,1$ nicht in einer höheren Potenz liegen, hat man die Isomorphie

$$K[S,T]/\left(S^2\right) \cong \operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} R.$$

Insbesondere ist der assoziierte graduierte Ring nicht reduziert, obwohl R ein Integritätsbereich ist.

Zu einem R-Modul M und einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ besitzt die Folge der R-Untermoduln

$$M_n = \mathfrak{a}^n M \subseteq M$$

die Eigenschaften

(1) $M_{n+1} \subseteq M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Es ist $\mathfrak{a} M_n = M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 17.3. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R und M ein R-Modul. Dann nennt man die direkte Summe

$$\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M = M/\mathfrak{a}M \oplus \mathfrak{a}M/\mathfrak{a}^2M \oplus \mathfrak{a}^2M/\mathfrak{a}^3M \oplus \ldots$$

den *assoziierten graduierten Modul* zu $\mathfrak{a}$.

Lemma 17.4. *Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R und M ein R-Modul. Dann ist der assoziierte graduierte Modul $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M$ in natürlicher Weise ein graduierter Modul über dem assoziierten graduierten Ring $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} R$. Wenn der Modul M endlich erzeugt ist, so ist $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M$ ein endlich erzeugter $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} R$-Modul.*

Beweis. Wir gehen aus von der Multiplikation

$$\mathfrak{a}^d \times \mathfrak{a}^n M \longrightarrow \mathfrak{a}^{d+n} M,\ (f,v) \longmapsto fv,$$

die wegen

$$\mathfrak{a}^d \mathfrak{a}^n M = \mathfrak{a}^{d+n} M$$

wohldefiniert ist. Wegen $\mathfrak{a}^{d+1}\mathfrak{a}^n M = \mathfrak{a}^d \mathfrak{a}^{n+1} M = \mathfrak{a}^{d+n+1} M$ induziert dies eine Abbildung

$$\mathfrak{a}^d/\mathfrak{a}^{d+1} \times \mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1} M \longrightarrow \mathfrak{a}^{d+n} M/\mathfrak{a}^{d+n+1} M,\ ([f],[v]) \longmapsto [fv].$$

Die Gesamtheit dieser Abbildung ergibt eine Abbildung

$$\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} R \times \operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M \longrightarrow \operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M,$$

die $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} M$ zu einem graduierten $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{a}} R$-Modul macht.

Ein Erzeugendensystem von $M/\mathfrak{a}M$ ergibt direkt ein Erzeugendensystem für den graduierten Modul. □

Zumeist wird das Ideal ein maximales Ideal sein, insbesondere das maximale Ideal eines lokalen Ringes. Die beiden folgenden Lemmata zeigen, dass man bei der Bestimmung des assoziierten graduierten Ringes die Lokalisierung umgehen kann.

Lemma 17.5. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring, $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal und M ein R-Modul. Es sei $S = R_{\mathfrak{n}}$ die Lokalisierung an $\mathfrak{n}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_{\mathfrak{n}}$ und $M_{\mathfrak{n}}$ die Lokalisierung des Moduls. Dann ist*

$$\mathfrak{m}^n M_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}^{n+1} M_{\mathfrak{n}} \cong \mathfrak{n}^n M/\mathfrak{n}^{n+1} M.$$

Beweis. Nach Aufgabe 14.10 ist $R/\mathfrak{n} \cong R_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$, so dass der gleiche Restklassenkörper vorliegt. Die natürlichen R-Modulhomomorphismen $\mathfrak{n}^n \to \mathfrak{m}^n$ und

$$M \longrightarrow M_\mathfrak{n}$$

induzieren einen R-Modulhomomorphismus

$$\mathfrak{n}^n M \longrightarrow \mathfrak{m}^n M_\mathfrak{m}$$

und einen K-Vektorraumhomomorphismus

$$\mathfrak{n}^n M/\mathfrak{n}^{n+1} M \longrightarrow \mathfrak{m}^n M_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}^{n+1} M_\mathfrak{n}.$$

Dieser ist surjektiv, da R-Modulerzeuger von $\mathfrak{n}^n M$ auf ein $R_\mathfrak{n}$-Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}^n M_\mathfrak{m}$ abbilden, und diese auf ein $R_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$-Erzeugendensystem von

$$\mathfrak{m}^n M_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}^{n+1} M_\mathfrak{n}$$

abbilden.

Zum Beweis der Injektivität sei $x \in \mathfrak{n}^n M$ ein Element, das rechts auf 0 abgebildet wird. D.h. es gilt $x \in \mathfrak{m}^{n+1} M_\mathfrak{n}$ in der Lokalisierung $M_\mathfrak{n}$. Dies bedeutet, dass es Elemente $y_1, \ldots, y_r \in \mathfrak{n}^{n+1}$ und Elemente $q_i = \frac{z_i}{s_i} \in M_\mathfrak{n}$ (also mit $s_i \notin \mathfrak{n}$ und $z_i \in M$) mit

$$x = y_1 \frac{z_1}{s_1} + \cdots + y_r \frac{z_r}{s_r}$$

gibt. Dies bedeutet zurückübersetzt nach M, dass es ein Element $s \notin \mathfrak{n}$ mit

$$sx = y_1 w_1 + \cdots + y_r w_r$$

für gewisse $w_i \in M$ gibt. Da s nicht zum maximalen Ideal $\mathfrak{n}$ gehört, gibt es ein $c \in R$ und $g \in \mathfrak{n}$ mit $g + cs = 1$. Wir multiplizieren die obige Gleichung mit c und erhalten

$$(1-g)x = csx = c\,(y_1 w_1 + \cdots + y_r w_r)$$

bzw.

$$x = c\,(y_1 w_1 + \cdots + y_r w_r) + gx.$$

Dabei gehört die rechte Seite offensichtlich zu $\mathfrak{n}^{n+1} M$, und damit definiert x das Nullelement in $\mathfrak{n}^n M/\mathfrak{n}^{n+1} M$. □

Lemma 17.6. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring, $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal und M ein R-Modul. Es sei $S = R_\mathfrak{n}$ die Lokalisierung an $\mathfrak{n}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} R_\mathfrak{n}$ und $M_\mathfrak{n}$ die Lokalisierung des Moduls. Dann gibt es eine natürliche graduierte $R/\mathfrak{n} = S/\mathfrak{m}$-Algebraisomorphie*

$$\operatorname{Gr}_\mathfrak{n} M = \operatorname{Gr}_\mathfrak{m} M_\mathfrak{n}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 17.5. □

Die Hilbert-Samuel-Multiplizität eines lokalen Ringes

Definition 17.7. Es sei R ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann nennt man die Multiplizität des assoziierten graduierten Moduls $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} M$ die *Hilbert-Samuel-Multiplizität* von M.

Entsprechend wird die Hilbert-Samuel-Funktion und das Hilbert-Samuel-Polynom zu M unter Bezug auf den assoziierten graduierten Moduls definiert. Insbesondere sind diese Konzepte für den lokalen Ring R selbst definiert und die Hilbert-Samuel-Multiplizität liefert eine Invariante für lokale Ringe.

Bemerkung 17.8. Entscheidend für die Hilbert-Samuel-Multiplizität eines endlich erzeugten Moduls M über einem noetherschen lokalen Ring sind die $R/\mathfrak{m}$-Vektorraumdimensionen von $\mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M$, denn diese sind nach Definition die n-te Stufe des assoziierten graduierten Moduls. Es liegt eine standard-graduierte $R/\mathfrak{m}$-Algebra $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} R$ und darüber nach Lemma 16.5 ein endlich erzeugter graduierter Modul $\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} M$ vor, so dass die Multiplizität wohldefiniert ist. Nach Satz 16.15 ist die Multiplizität eine natürliche Zahl.

Lemma 17.9. *Es sei $\mathfrak{n} \subseteq R$ ein maximales Ideal in einem noetherschen Ring und es sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist die Hilbert-Samuel-Funktion des $R_{\mathfrak{n}}$-Moduls $M_{\mathfrak{n}}$ gleich*

$$H(n) = \dim_{R/\mathfrak{n}} \left(\mathfrak{n}^n M/\mathfrak{n}^{n+1} M \right).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 17.5. □

Lemma 17.10. *Es sei R ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist*

$$\tilde{H}_{\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}} M}(n) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \left(M/\mathfrak{m}^n M \right),$$

d.h. die kumulative Hilbertfunktion des assoziierten graduierten Moduls misst die Vektorraumdimensionen von $M/\mathfrak{m}^n M$.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von $R/\mathfrak{m}$-Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{m}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{m}^n M \longrightarrow 0$$

zwischen endlichdimensionalen $R/\mathfrak{m}$-Vektorräumen. Dabei gilt

$$\dim_{R/\mathfrak{m}} \left(M/\mathfrak{m}^{n+1} M \right) - \dim_{R/\mathfrak{m}} \left(M/\mathfrak{m}^n M \right) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \left(\mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M \right) = H(n).$$

Somit ist

$$\dim_{R/\mathfrak{m}} \left(M/\mathfrak{m}^n M \right) = \sum_{i<n} H(i)$$

und das ist die Definition der kumulativen Hilbertfunktion. □

Satz 17.11. *Es sei*

$$F \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

ein Polynom $\neq 0$ mit dem Untergrad m. Dann ist die Hilbert-Samuel-Multiplizität des Hyperflächenringes $R = K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}/(F)$ gleich m.

Beweis. Nach Voraussetzung hat F die Gestalt

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots .$$

Es sei $\mathfrak{a} = (X_1, \ldots, X_n)$ das maximale Ideal im Polynomring

$$S = K[X_1, \ldots, X_n].$$

Dabei gilt

$$F \in \mathfrak{a}^m.$$

Für ein weiteres Polynom $G \in \mathfrak{a}^{d-m}$ (mit $d \geq m$) ist $GF \in \mathfrak{a}^d$. Daher liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S/\mathfrak{a}^{d-m} \xrightarrow{\cdot F} S/\mathfrak{a}^d \longrightarrow S/(\mathfrak{a}^d, F) = R/\mathfrak{m}^d \longrightarrow 0$$

vor. Dabei folgt die Injektivität links aus einer direkten Gradbetrachtung (siehe Aufgabe 17.14). Die Dimension von $S/\mathfrak{a}^d$ ist nach Aufgabe 4.7 gleich

$$\binom{d-1+n}{n} = \frac{(d+n-1)\cdots d}{n!} = \frac{d^n + \frac{n(n-1)}{2} d^{n-1} + \cdots}{n!}.$$

Daher ergibt sich für $d \geq m$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\dim(R/\mathfrak{m}^d) &= \frac{d^n + \frac{n(n-1)}{2} d^{n-1} + \cdots}{n!} - \frac{(d-m)^n + \frac{n(n-1)}{2}(d-m)^{n-1} + \cdots}{n!} \\
&= \frac{d^n + \frac{n(n-1)}{2} d^{n-1} + \cdots}{n!} - \frac{d^n - nmd^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} d^{n-1} + \cdots}{n!} \\
&= \frac{nmd^{n-1} + \cdots}{n!} \\
&= \frac{md^{n-1} + \cdots}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. □

Wegen des letzten Satzes und wegen Satz 15.4 stimmt die Hilbert-Samuel-Multiplizität eines Hyperflächenringes mit der über das Schnittverhalten mit einer generischen Gerade definierte Multiplizität überein. Die Beziehung zwischen Multiplizität und Glattheit werden wir in Korollar 21.9 diskutieren.

Abbildungsverzeichnis