Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 13

Kähler-Differentiale und Jacobi-Matrix

Lemma 13.1. *Es sei R ein kommutativer Ring, es sei A eine kommutative R-Algebra und $I \subseteq A$ ein Ideal mit dem Restklassenring $B = A/I$. Dann ist die Sequenz*

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $a \in I$ auf $da \otimes 1$ und $da \otimes b$ auf bda.

Beweis. Die R-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow \Omega_{A|R},\, a \longmapsto da,$$

kann man auf das Ideal $I \subseteq A$ einschränken. Durch Tensorieren mit A/I erhält man unter Verwendung von Proposition Anhang 6.9 (2) die A/I-lineare Abbildung

$$I/I^2 \cong I \otimes_A A/I \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_A A/I.$$

Die Surjektivität der Abbildung rechts ist klar, da der B-Modul $\Omega_{B|R}$ von den db, $b \in B$, erzeugt wird und diese von da, $a \in A$ herrühren. Ein Element $a \in I$ geht auf da und damit auf 0 in $\Omega_{B|R}$, da das Element a in B selbst 0 wird.

Es sei nun

$$\omega \in \Omega_{A|R} \otimes_A B$$

ein Element, das in $\Omega_{B|R}$ auf 0 abbildet. Wir können

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} da_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} da_i \otimes \overline{c}_i$$

mit $a_i, c_i \in A$ schreiben. Da es auf 0 in $\Omega_{B|R}$ abbildet, gilt in dem von den Symbolden db, $b \in B$, erzeugten freien B-Modul die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} c_i da_i = \sum_{j=1}^{m} h_j \omega_j,$$

wobei $h_j \in B$ und die ω_j Erzeuger der Relationen für den Modul der Kähler-Differentiale ist, also gleich $dfg = fdg + gdf$ mit $f, g \in B$ oder gleich $d(rf + sg) = rdf + sdg$ mit $r, s \in R$ und $f, g \in B$ ist. Der angesprochene freie B-Modul entsteht aus dem durch die da, $a \in A$, erzeugten freien A-Modul einfach dadurch, dass man die Koeffizienten aus I und die dI zu 0 macht. Somit gilt in diesem freien A-Modul

$$\sum_{i=1}^{n} c_i da_i - \sum_{j=1}^{m} h_j \omega_j = \sum_{k=1}^{\ell} m_k dn_k + du$$

mit $m_k \in I$, $n_k \in B$ und $u \in I$. In $\Omega_{A|R} \otimes_R B$ wird $\sum_{k=1}^{\ell} m_k dn_k$ wegen der Tensorierung zu 0 und daher gilt dort in der Tat

$$\sum_{i=1}^{n} c_i da_i = du.$$

□

Korollar 13.2. *Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als*

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

gegeben sei. Dann ist

$$\Omega_{A|R} = \bigoplus_{i=1}^{n} A dX_i / (dF_1, \ldots, dF_k).$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.5 und Lemma 13.1. □

Bemerkung 13.3. Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als $A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$ gegeben sei. Dann ist nach Lemma 12.4 (4)

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial X_n} dX_n$$

und nach Korollar 13.2 gibt es eine exakte Sequenz

$$A^k \xrightarrow{M} A^n \longrightarrow \Omega_{A|R} \longrightarrow 0\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

die transponierte Jacobi-Matrix (ohne Auswertung an einem Punkt) ist. Die Standardvektoren e_j werden auf dX_j abgebildet und die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial X_n} \end{pmatrix}$, die die Nullelemente dF_j repräsentieren, sind die Bilder der durch die Matrix gegebenen Abbildung.

Zu einer K-Algebra

$$A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

und einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V = V(f_1, \ldots, f_m)$ mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq A$ und Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_{V,P}$$

ist

$$\Omega_{R|K} = \Omega_{A|K} \otimes_A R,$$

und die Tensorierung

$$\Omega_{R|K} \otimes_R K = \Omega_{A|K} \otimes_A K$$

zur Restekörperauswertung

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = K$$

spielt eine besondere Rolle. Es ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Dualraum des extrinsischen Tangentialraumes von V an P. Das bedeutet, dass $\Omega_{R|K} \otimes_R K$ in natürlicher Weise der Kotangentialraum im Punkt P ist.

Lemma 13.4. *Es sei K ein Körper,*

$$A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

eine endlich erzeugte K-Algebra und $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V = V(f_1, \ldots, f_m)$ ein Punkt des zugehörigen Nullstellengebildes mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq A$ und Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}}.$$

Dann ist der Tangentialraum zu V in P in kanonischer Weise der duale Vektorraum zu $\Omega_{R|K} \otimes_R K$.

Beweis. Nach Bemerkung 12.9 gibt es eine exakte Sequenz

$$A^m \xrightarrow{M} A^n \longrightarrow \Omega_{A|K} \longrightarrow 0\,,$$

wobei M die transponierte Jacobi-Matrix zu den f_i ist. Wir tensorieren mit dem Restekörper K und erhalten eine exakte Sequenz

$$K^m \xrightarrow{M(P)} K^n \longrightarrow \Omega_{A|K} \otimes_A K \longrightarrow 0$$

von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Die duale Sequenz dazu ist

$$0 \longrightarrow \left(\Omega_{A|K} \otimes_A K\right)^* \longrightarrow K^n \xrightarrow{\mathrm{Jac}(P)} K^m$$

und ebenfalls exakt. Nach Definition 3.18 ist aber der Kern der Jacobi-Matrix im Punkt P der Tangentialraum an V in P. $\square$

Lemma 13.5. *Es sei K ein Körper und R eine lokale kommutative K-Algebra und es sei die Gesamtabbildung*

$$K \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$$

ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto df \otimes 1,$$

ein $R/\mathfrak{m}$-Modulisomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 13.1 liegt eine exakte Sequenz

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m} \longrightarrow \Omega_{R/\mathfrak{m}|K} \longrightarrow 0$$

von $R/\mathfrak{m}$-Modulhomomorphismen vor. Nach Voraussetzung ist $R/\mathfrak{m} = K$ und daher $\Omega_{R/\mathfrak{m}|K} = 0$. Somit ist die angegebene Abbildung surjektiv. Zum Nachweis der Injektivität betrachten wir die $R/\mathfrak{m}$-duale Abbildung, also die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_{R/\mathfrak{m}}\left(\Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{m}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{R/\mathfrak{m}}\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, R/\mathfrak{m}\right),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ d,$$

und müssen zeigen, dass diese surjektiv ist (es geht um Vektorräume).

Der linke Homomorphismenmodul ist nach Lemma Anhang E.11. und Lemma 12.3 isomorph zu

$$\operatorname{Hom}_R\left(\Omega_{R|K}, R/\mathfrak{m}\right) \cong \operatorname{Der}_K\left(R, R/\mathfrak{m}\right).$$

Die Geasmtabbildung ordnet einer K-Derivation $\delta\colon R \to R/\mathfrak{m}$ die Abbildung

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto \delta(f),$$

zu. Es sei nun

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto \epsilon(f),$$

ein $R/\mathfrak{m}$-Modulhomomorphismus. Wir müssen zeigen, dass dies von einer Derivation herkommt. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\delta\colon R \longrightarrow R/\mathfrak{m},\ f \longmapsto \epsilon(f - \overline{f}),$$

wobei $\overline{f}$ den Wert von f im Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ bezeichnet, den man über die Identifizierung $K = R/\mathfrak{m}$ wieder in R auffasst. Somit gehört $f - \overline{f} \in \mathfrak{m}$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Eine direkte Verifizierung ähnlich zum Beweis zu Satz 23.2 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)) zeigt, dass es sich um eine Derivation handelt. Diese bildet auf ϵ ab. □

Bemerkung 13.6. In der Situation von Lemma 13.4 kann man direkt eine Beziehung zwischen dem (extrinsischen) Tangentialraum, der als Kern der Jacobi-Matrix gegeben ist, und dem Dualraum zu $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ stiften. Es sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in T_PV = \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P\right).$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\mathfrak{m}_P \longrightarrow K,\, g \longmapsto (dg)_P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \partial_1 g(P) + \cdots + v_n \partial_n g(P),$$

dabei wird, in analytischer Sprache, einer Funktion g die Auswertung in P ihrer Richtungsableitung in Richtung v zugeordnet. Die Kernbedingung stellt dabei sicher, dass Funktionen aus dem Ideal $(f_1, \ldots, f_m)$ auf 0 abgebildet werden und die Abbildung auf dem maximalen Ideal des Restklassenringes wohldefiniert ist. Nach der Produktregel wird dabei $\mathfrak{m}_P^2$ auf 0 abgebildet und es ergibt sich eine K-lineare Abbildung

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow K.$$

Abbildungsverzeichnis