Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 8

Aufgabe 8.1. Zeige, dass der Quotient

$$\frac{1 - x_3}{x_1 + x_2\mathrm{i}}$$

für $x_1, x_2 \to 0$ und $x_3 = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ gegen 0 konvergiert.

Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und

$$A = \bigoplus_{d \in D} A_d$$

eine D-graduierte R-Algebra. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt *homogen*, wenn zu $f \in \mathfrak{a}$ auch die homogenen Komponenten $f_d \in \mathfrak{a}$ sind.

Aufgabe 8.2. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative R-Algebra. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ ebenfalls D-graduiert ist.

Aufgabe 8.3. Es sei $H \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein (in der Standardgraduierung) homogenes Polynom vom Grad e. Zeige die Beziehung

$$eH = X_1 \frac{\partial H}{\partial X_1} + \cdots + X_n \frac{\partial H}{\partial X_n}.$$

In den meisten der folgenden Aufgaben kann man statt mit einem Grundkörper mit einem beliebigen kommutativen Grundring arbeiten. Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Ein K-Automorphismus

$$\varphi \colon A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

Aufgabe 8.4. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Zeige, dass der in Lemma 12.15 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi \colon A \longrightarrow A$$

homogen ist.

Aufgabe 8.5. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$-graduierte $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Aufgabe 8.6. Es sei R ein kommutativer Ring mit $2 \in R^{\times}$, auf dem die Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass man R mit einer $\mathbb{Z}/(2)$-Graduierung versehen kann derart, dass die neutrale Stufe der Invariantenring ist.

Aufgabe 8.7. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Es sei

$$\varphi\colon A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^{\vee}$ mit $\varphi = \varphi_\chi$ gibt, wobei φ_χ der gemäß Lemma 12.15 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) zu χ gehörige Automorphismus ist.

Aufgabe 8.8.*

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und $\delta\colon \mathbb{Z}^r \to D$ ein Gruppenhomomorphismus mit der zugehörigen D-Graduierung auf dem Polynomring $K[X_1, \ldots, X_r]$. Zeige, dass der Unterring der neutralen Stufe ein Monoidring über K ist.

Aufgabe 8.9. Es sei K ein Körper und

$$\delta\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Bestimme die neutrale Stufe von $K[X, Y]$ zur Graduierung, die durch $\operatorname{grad}(X_1) = \delta(e_1)$ und $\operatorname{grad}(X_2) = \delta(e_2)$ gegeben ist.

Aufgabe 8.10. Es sei R ein Integritätsbereich mit $2 \neq 0$ und $r \in R$ ein Element, das keine Quadratwurzel in R besitze. Zeige, dass das Polynom $X^2 - r \in R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8.11. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Polynom

$$XY - Z^n$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass die Ringe $K[X,Y,Z]/(XY-Z^n)$ (mit $n \geq 2$) genau in $P=(0,0,0)$ singulär sind.

Aufgabe 8.13. Zeige, dass die Ringe $K[X,Y,Z]/(X^2+YZ^2+Y^{m+1})$ (mit $m \geq 1$) genau in $P=(0,0,0)$ singulär sind.

Aufgabe 8.14. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/\,(X^2+Y^3+Z^4)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 8.15. Bestimme den singulären Ort von $K[X,Y,Z]/(X^2+YZ^2+Z^n)$.

Aufgabe 8.16. Zeige explizit, dass der Ring $\mathbb{C}[X,Y,Z]/\,(X^2+YZ^2+Y^2)$ (also die Diedersingularität zu $m=1$) isomorph zu $\mathbb{C}[S,T,U]/\,(ST-U^4)$ ist.

Aufgabe 8.17. Zeige direkt, dass die Polynome

$$U^{2m}+V^{2m},\ U^2V^2 \text{ und } UV(U^{2m}-V^{2m})$$

invariant zur Operation der binären Diedergruppe BD_m auf $\mathbb{C}[U,V]$ sind, und bestimme eine Relation zwischen diesen Polynomen.

Aufgabe 8.18. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/\,(X^2+Y^3+YZ^3)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 8.19. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/\,(X^2+Y^3+Z^5)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 8.20. Zeige, dass es auf den A- und den D-Singularitäten und auf der E_6 und der E_7-Singularität glatte Kurven gibt, die durch den singulären Punkt laufen.

Aufgabe 8.21. Zeige, dass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[X,Y,Z]/\left(X^2+Y^3+Z^5\right) \longrightarrow \mathbb{C}[R,S,T]/\left(RS-T^2\right)$$

gibt.

Wir erinnern an einige weitere Graduierungsbegriffe.

Ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring A heißt *positiv graduiert*, wenn $A_d = 0$ für alle $d \in \mathbb{Z}_-$ ist.

Ein kommutativer $\mathbb{N}$-graduierter Ring R heißt *standard-graduiert*, wenn er als R_0-Algebra von der ersten Stufe R_1 endlich erzeugt wird.

In einem $\mathbb{N}$-graduierten Ring $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ nennt man $R_+ = \bigoplus_{d \geq 1} R_d$ das *irrelevante Ideal*.

AUFGABE 8.22. Zeige, dass die Ringe der ADE-Singularitäten eine positive Graduierung besitzen. Man gebe diese jeweils an.

Wir erinnern an folgende Definition.

Zu einer Gruppe G heißt die von allen Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$, erzeugte Untergruppe die *Kommutatorgruppe* von G. Sie wird mit $K(G)$ bezeichnet.

Die Kommutatorgruppe ist nach Lemma 21.5 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) ein Normalteiler, die Restklassengruppe $G/K(G)$ nennt man auch die *Abelianisierung* von G.

AUFGABE 8.23. Bestimme zu den endlichen Untergruppen $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ jeweils die Kommutatoruntergruppe und die Abelianisierung.

AUFGABE 8.24. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe, die zur Operation von G auf dem Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ führt. Zeige, dass dies auch eine Operation von G auf der Lokalisierung $K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ induziert, und dass $\left(K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}\right)^G$ isomorph zu $\left(K[X_1, \ldots, X_n]^G\right)_{\mathfrak{n}}$ ist, wobei $\mathfrak{n} = (X_1, \ldots, X_n) \cap K[X_1, \ldots, X_n]^G$ bezeichnet.

AUFGABE 8.25. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen lokalen Ring als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass der Fixring R^G ebenfalls lokal ist.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5