Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 7

Aufgabe 7.1. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Es sei $\mathrm{Perm}\,(M)$ die Gruppe der Permutationen auf M. Zeige folgende Aussagen.

(1) Wenn G auf M operiert, so ist die Abbildung
$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),\ g \longmapsto (x \mapsto gx),$$
ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Wenn umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus
$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),$$
vorliegt, so wird durch
$$G \times M \longrightarrow M,\ (g,x) \longmapsto (\varphi(g))(x),$$
eine Gruppenoperation von G auf M definiert.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass die G-Äquivalenz bei einer Gruppenoperation in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 7.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Gruppenoperation der n-ten Einheitswurzeln durch Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Bestimme die Bahnen und die Isotropiegruppen dieser Operation. Kann man die Quotientenabbildung durch eine polynomiale Funktion realisieren?

Aufgabe 7.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgende Aussagen.

(1) Für die Einheiten gilt
$$\left(R^G\right)^\times = R^G \cap R^\times .$$

(2) Wenn R ein Körper ist, so ist auch R^G ein Körper.

Aufgabe 7.5. Es sei S ein kommutativer Ring mit $2 \neq 0$ und $a \in S$. Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \cong \{1,-1\}$ auf der quadratischen Erweiterung
$$R := S[X]/(X^2-a)$$
als Gruppe von S-Algebrahomomorphismen operiert, indem -1 durch $X \mapsto -X$ wirkt. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 7.6. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das unter der Gruppenoperation invariant ist (es gelte also $f\sigma \in \mathfrak{a}$ für $f \in \mathfrak{a}$ und jedes $\sigma \in G$). Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es gibt eine natürliche Operation von G auf dem Restklassenring $R/\mathfrak{a}$.
(2) Es gibt einen Ringhomomorphismus
$$\psi\colon\ R^G/\left(\mathfrak{a} \cap R^G\right) \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^G .$$
(3) Die Abbildung ψ aus Teil (2) ist injektiv.
(4) Wenn G endlich ist und R einen Körper der Charakteristik 0 enthält, so ist ψ surjektiv.

Aufgabe 7.7. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Untergruppe mit der zugehörigen Operation auf dem affinen Raum K^n. Es sei K unendlich. Zeige, dass es eine nichtleere Zariski-offene Teilmmenge $U \subseteq K^n$ derart gibt, dass die Bahnen zu $x \in U$ aus $\#(G)$ Elementen besteht.

Gemäß Aufgabe 7.1 ergibt eine Gruppenoperation für jedes $g \in G$ eine Bijektion $x \mapsto gx$ auf M. Wenn M zusätzliche Strukturen besitzt, so verlangt man häufig, dass diese Bijektionen diese Strukturen respektieren, also beispielsweise linear oder stetig sind. Man spricht dann von einer linearen oder von einer stetigen Operation oder sagt, dass die Gruppe als Gruppe von Automorphismen oder als Gruppe von Homöomorphismen operiert.

Aufgabe 7.8. Es sei X ein topologischer Raum, auf dem eine Gruppe G operiere, wobei zu jedem $g \in G$ die Abbildung $x \mapsto gx$ stetig sei. Zeige, dass dadurch eine Operation (von rechts) von G auf dem Ring der stetigen Funktionen $C(X, \mathbb{R})$ als Gruppe von Ringautomorphismen gegeben ist.

Aufgabe 7.9. Es sei
$$f\colon\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion
$$g\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$
mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(2) Für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7.10. Wir betrachten die Menge der quadratischen Polynome

$$M = \left\{ aX^2 + bX + c \,|\, a, b, c \in K,\ a \neq 0 \right\}$$

über einem Körper K, und es sei G die Menge der Transformationen vom Typ $X \mapsto \alpha X + \beta$ mit $\alpha \neq 0$.

a) Zeige, dass G auf M in natürlicher Weise operiert.

b) Zeige, dass G auf K durch Multiplikation mit α^2 operiert.

c) Zeige, dass die *Diskriminante*, also der Ausdruck $b^2 - 4ac$, der einem quadratischen Polynom zugeordnet ist, G-verträglich bezüglich dieser beiden Operationen ist.

Aufgabe 7.11. Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$-Modul. Zeige, dass

(1) M nichts anderes ist als ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$.
(2) ein $K[G]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ eine K-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G. Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.

Aufgabe 7.12. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass die zyklische Gruppe

$$Z_n = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{-j} \end{pmatrix} \,|\, j = 0, \ldots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

auf der Punktmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \,|\, j = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

treu operiert, dass sie bei n ungerade auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle \,|\, j = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

ebenfalls treu operiert und dass sie bei n gerade auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle \,|\, j = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$$

operiert, aber nicht treu. Was ist in diesem Fall der Kern der Operation?

Aufgabe 7.13. Zeige, dass die binäre Diedergruppe BD_1 eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist.

Aufgabe 7.14. Wir betrachten die binäre Diedergruppe BD_n. Zeige, dass bei $n \geq 3$ die von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe kein Normalteiler ist.

Aufgabe 7.15. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine $2n$-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass die binäre Diedergruppe BD_n auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle | \, j = 0, \ldots, n-1 \right\} \cup \{ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \}$$

operiert.

Aufgabe 7.16. Zeige, dass die in Beispiel 7.7, Beispiel 7.8, Beispiel 7.9 und Beispiel 7.10 beschriebenen Gruppen bereits Untergruppen der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ sind.

Aufgabe 7.17. Zeige, dass die Matrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix}$$

zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ gehört.

Aufgabe 7.18. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe und es sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$. Zeige, dass durch

$$\Phi(w, z) := \frac{1}{\# (G)} \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma w, \sigma z \rangle$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ definiert wird.

Aufgabe 7.19. Es sei $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix und

$$\varphi \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann unitär ist, wenn ${}^t M \cdot \overline{M}$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 7.20. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}$$

mit $\zeta = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 7.21. Zeige, dass die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \zeta & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

zur binären Oktaedergruppe gehört (dabei ist ζ eine primitive achte Einheitswurzel). Gehört sie auch zur binären Tetraedergruppe?

Aufgabe 7.22. Zeige, dass die binäre Ikosaedergruppe 120 Elemente besitzt.

Aufgabe 7.23. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $\alpha = \frac{360}{n}$. Betrachte die Untergruppe der Drehmatrizen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^j \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \, .$$

Zeige, dass diese Gruppe, aufgefasst in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, konjugiert zu Z_n aus Beispiel 7.7 ist.

Aufgabe 7.24. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe über einem Körper K und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige

$$K[X_1, \ldots, X_n]^G = K[X_1, \ldots, X_n] \cap L[X_1, \ldots, X_n]^G .$$

Aufgabe 7.25. Betrachte die Untergruppe der Drehmatrizen, die durch die Vierteldrehung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Bestimme den reellen und den komplexen Invariantenring zur zugehörigen linearen Operation.

Aufgabe 7.26. Bestimme zu einer speziellen unitären Matrix

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

die Eigenwerte und die Eigenvektoren.

Aufgabe 7.27. Zeige, dass zu einer speziellen unitären Matrix

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

die beiden Eigenvektoren, aufgefasst in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$, antipodal sind.

Aufgabe 7.28. Es sei $G \subseteq \mathrm{SU}_n$ eine endliche Untergruppe. Zeige, dass man die natürlich Operation von G auf dem $\mathbb{C}^n$ auf einen jeden offenen Ball der Form $U(0,r) \subseteq \mathbb{C}^n$ einschränken kann.

Aufgabe 7.29. Zeige, dass zu einer diagonalisierbaren Matrix

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

die beiden Eigenvektoren, aufgefasst in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$, nicht antipodal sein müssen.

Aufgabe 7.30. Überprüfe, dass die in Vorlesung 24 angegebenen Abbildungen eine Homöomorphie zwischen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und S^2 stiften.

Aufgabe 7.31. Es sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine spezielle Matrix mit der zugehörigen Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2.$$

Zeige, dass φ keine längentreue Abbildung und nicht zu einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ fortsetzbar sein muss.

Aufgabe 7.32. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Zeige, das die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(-ad+bc) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(-ab+cd) \\ 2(-ac+bd) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

gleich 1 ist.

Aufgabe 7.33. Zeige, dass die (komponentenweise) komplexe Konjugation einen Gruppenautomorphismus auf $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ induziert, der unter der in Satz 7.13 beschriebenen Abbildung

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\,,$$

mit der Konjugation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ verträglich ist. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation auf $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ auch als Konjugation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ realisiert werden kann.

Aufgabe 7.34. Zeige, dass man die Kleinsche Vierergruppe nicht als Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, wohl aber als Untergruppe der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ realisieren kann.

Aufgabe 7.35. Man gebe ein Beispiel von zwei endlichen Untergruppen $G, H \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die zueinander isomorph, aber nicht zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 7.36. Man gebe ein Beispiel von zwei endlichen Untergruppen $G, H \subseteq \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, die zueinander isomorph, aber nicht zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 7.37. Zeige, dass die binäre Ikosaedergruppe nicht isomorph zur Permutationsgruppe S_5 ist.

Aufgabe 7.38. Bestimme die Ordnungen der Elemente der binären Ikosaedergruppe.

Aufgabe 7.39. Zeige, dass die in Beispiel 7.8, Beispiel 7.9, Beispiel 7.10 und Beispiel 7.11 beschriebenen Gruppen unter dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

die Urbildgruppen der entsprechenden reellen Gruppen sind.

Aufgabe 7.40. Wir betrachten die Gruppenoperation

$$\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (u,x,y) \longmapsto (ux, u^{-1}y).$$

Bestimme die Bahnen der Operation. Ist der Quotient (versehen mit der Bildtopologie) ein Hausdorff-Raum?

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7