Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 6

Aufgabe 6.1. Es sei $\varphi\colon M \to N$ ein Monoidhomomorphismus zwischen kommutativen Monoiden und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf M durch $\mu \sim \nu$, falls $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$ ist, definiert. Zeige, dass $\sim$ mit der Verknüpfung verträglich ist.

Aufgabe 6.2.*

Es sei $(M, +, 0)$ eine kommutative Gruppe und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeige, dass $\sim$ genau dann mit der Verknüpfung verträglich ist, wenn es eine Untergruppe $H \subseteq M$ derart gibt, dass $\mu \sim \nu$ genau dann gilt, wenn $\mu - \nu \in H$ ist.

Aufgabe 6.3. Es sei R eine Relation auf einem kommutativen Monoid M. Zeige, dass es eine kleinste, mit der Verknüpfung verträgliche Äquivalenzrelation auf M gibt, die R umfasst.

Aufgabe 6.4. Es sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die von einer einzigen Relation $\alpha \sim \beta$ erzeugte mit der Verknüpfung verträgliche Äquivalenzrelation auf M folgendermaßen gegeben ist: Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn es eine Kette

$$x_1 = x, \ldots, x_n = y$$

gibt, wobei es für jedes i ein $r \in \mathbb{N}$ und ein $\gamma \in M$ mit $x_i = r\alpha + \gamma$ und $x_{i+1} = r\beta + \gamma$ (oder umgekehrt) ist.

Aufgabe 6.5. Es sei $\sim$ eine mit der Verknüpfung verträgliche Äquivalenzrelation auf einem kommutativen Monoid. Zeige, dass es auf der Quotientenmenge $M/\sim$ eine eindeutig bestimmte Verknüpfung derart gibt, dass die kanonische Projektion $M \to M/\sim$ ein Monoidhomomorphismus ist.

Aufgabe 6.6. Finde eine Realisierung des Monoids $\mathbb{N}^2/2e \sim 4f$ als Untermonoid von $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}/(2)$.

Aufgabe 6.7. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 6.8. Man gebe ein Beispiel eines Untermonoids $M \subseteq \mathbb{N}^2$, das nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 6.9. Berechne

$$\left(4T^{(-1,3)} - 6T^{(-2,5)} + 5T^{(0,-2)} + 3T^{(-1,1)}\right) \cdot \left(-7T^{(1,0)} + 8T^{(4,5)} - 4T^{(-3,5)} + 6T^{(3,-1)}\right)$$

im Monoidring $K[\mathbb{Z}^2]$.

Aufgabe 6.10. Berechne

$$\left(4T^0 - 9T^1 + 9T^2 + 7T^3 - 4T^4\right) \cdot \left(4T^0 - T^1 + 5T^2 + 7T^3 - T^4\right)$$

im Monoidring $K[\mathbb{Z}/(5)]$.

Aufgabe 6.11. Zeige, dass die Multiplikation auf einem Monoidring zu einem kommutativen Monoid das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz erfüllt.

Aufgabe 6.12. Es sei M ein kommutatives Monoid und es sei $e \in M$ ein Element mit $2e = e$. Es sei K ein Körper und es sei $K[M]$ der zugehörige Monoidring. Zeige, dass T^e ein idempotentes Element in $K[M]$ ist.

Aufgabe 6.13. Es sei G eine endliche Gruppe $G \neq 0$. Zeige, dass der Monoidring $\mathbb{C}[G]$ nicht zusammenhängend ist, obwohl es in der Gruppe außer 0 kein Element e gibt, das die Gleichung $2e = e$ erfüllt.

Aufgabe 6.14. Es sei

$$G = \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/(n_1) \times \mathbb{Z}/(n_2) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_s)$$

eine endlich erzeugte kommutative Gruppe (mit $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) und sei K ein Körper. Beschreibe den Gruppenring $K[G]$ durch Variablen und Relationen. Zeige, dass (unter gewissen Voraussetzungen an den Körper) das entsprechende Nullstellengebilde glatt ist.

Aufgabe 6.15. Zeige, dass man den Koordinatenring zum Standardkegel $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$ über $\mathbb{C}$ als einen Monoidring realisieren kann.

Aufgabe 6.16. Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie

$$K[M] \cong K[X,Y,U,V]/(UX - VY)$$

vorliegt.

Die invertierbaren Elemente in einem Monoid nennt man auch Einheiten des Monoids. Sie bilden die Einheitengruppe des Monoids.

Aufgabe 6.17.*

Sei M ein kommutatives Monoid und K ein Körper. Es sei $m \in M$ und $T^m \in K[M]$. Zeige, dass m genau dann eine Einheit in M ist, wenn T^m eine Einheit in $K[M]$ ist.

Aufgabe 6.18. Es sei R ein kommutativer Ring und M, N kommutative Monoide. Zu einem Monoidhomomorphismus $\varphi \colon M \to N$ werde der zugehörige R-Algebrahomomorphismus

$$R[M] \longrightarrow R[N]$$

im Sinne von Korollar 6.8 mit $R[\varphi]$ bezeichnet. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Zur Identität Id_M ist auch $R[\mathrm{Id}_M]$ die Identität.
(2) Für eine Hintereinanderschaltung
von Monoidhomomorphismen ist

$$R[\varphi \circ \psi] = R[\varphi] \circ R[\psi].$$

Aufgabe 6.19. Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere, für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

Aufgabe 6.20. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgabe 6.21. Sei M ein kommutatives Monoid und sei $f \in M$. Wir betrachten die Menge

$$M_f = \{m - nf | \, m \in M, \, n \in \mathbb{N}\} / \sim,$$

wobei die Relation

$$m - nf \sim m' - n'f$$

genau dann gilt, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$m + n'f + kf = m' + nf + kf$$

in M gilt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Definiere auf M_f eine Monoidstruktur.
(3) Es sei R ein kommutativer Ring und sei $T^f \in R[M]$ das Monom zu f im Monoidring. Zeige

$$R[M_f] \cong R[M]_{T^f}.$$

Aufgabe 6.22. Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kn \in M$ gibt.

Die folgenden Aufgaben besprechen Monoidringe zu Monoiden, die nicht endlich erzeugt sind.

Aufgabe 6.23. Berechne in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Produkt

$$\left(X^2 + 4X^{3/2} - 5X + X^{1/2}\right)\left(2X^{3/2} + 4X - 7X^{1/2}\right) .$$

Aufgabe 6.24. Zeige, dass man jedes Element $F \in R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ (K ein Körper) als ein Polynom in $X^{1/b}$ mit einem $b \in \mathbb{N}_+$ schreiben kann, dass es also ein $P \in K[Y]$ derart gibt, dass $F = P(X^{1/b})$ gilt. Welches Polynom kann man bei

$$F = X^{1/2} + X^{1/3} + X^{1/5}$$

nehmen?

Aufgabe 6.25. Zeige, dass in $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element X keine Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 6.26. Zeige, dass in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element $X^2 + 1$ nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 6.27. Zeige, dass es in $R = \mathbb{C}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ keine irreduziblen Elemente gibt.

Aufgabe 6.28.*

Bestimme sämtliche Teiler von X im Ring $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$, wobei K ein Körper ist.

Aufgabe 6.29.*

Bestimme die Einheiten im Ring $R = K[\mathbb{Q}]$, wobei K ein Körper ist.

Die folgenden Aufgaben mit dem K-Spektrum eines kommutativen Monoids M, also der Menge aller Monoidhomomorphismen von M nach K (mit der multiplikativen Struktur).

Aufgabe 6.30. Wir betrachten das kommutative Monoid M, das durch die drei Erzeuger e, f, g und die einzige Relation $e + f = 5g$ gegeben ist. Bestimme das K-Spektrum zu M für verschiedene Körper K.

Aufgabe 6.31. Es sei M ein endliches kommutatives Monoid. Zeige, dass das K-Spektrum zu M auch endlich ist.

Aufgabe 6.32. Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z},\, e_1 \longmapsto 1,\, e_2 \longmapsto -1\,.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K-Spektren.

Aufgabe 6.33. Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe $K - \operatorname{Spek}(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

Aufgabe 6.34. Diskutiere Beispiel 5.6 im Kontext von Monoidringen.

Aufgabe 6.35. Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K-Spektren $K - \operatorname{Spek}(K[M]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K - \operatorname{Spek}(K[N]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

Aufgabe 6.36. Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q}-\operatorname{Spek}(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 6.37. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ bestimmt ist.

Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?

Aufgabe 6.38. Es sei M eine quadratische $r \times r$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ mit der zugehörigen Monoidabbildung und der zugehörigen Spektrumsabbildung

$$\varphi\colon\ K-\operatorname{Spek}(K[\mathbb{N}^r]) \longrightarrow K-\operatorname{Spek}(K[\mathbb{N}^r]),$$

wobei K ein unendlicher Körper sei. Zeige, dass genau dann $\det(M) \neq 0$ ist, wenn φ surjektiv auf eine offene Menge aus $K-\operatorname{Spek}(K[\mathbb{N}^r])$ abbildet.

Aufgabe 6.39. Es sei $\varphi\colon\ M \to N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \operatorname{Spec} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K-\operatorname{Spek}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K-Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

Aufgabe 6.40. Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht $K-\operatorname{Spek}(K[M \times N])$ zu $K-\operatorname{Spek}(K[M])$ und $K-\operatorname{Spek}(K[N])$?

Die folgenden Aufgaben haben mit der Differenzengruppe eines Monoids zu tun.

Aufgabe 6.41. Zeige, dass die Differenzengruppe zu einem kommutativen Monoid in der Tat eine Gruppe ist.

Aufgabe 6.42. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzengruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon\ \Gamma \longrightarrow G,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 6.43. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
(2) Die kanonische Abbildung $M \to \Gamma(M)$ ist injektiv.
(3) M lässt sich als Untermonoid einer Gruppe realisieren.

Abbildungsverzeichnis