Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 5.1. Skizziere die folgenden Nullstellengebilde in $\mathbb{R}^2$.

(1) $V(XY-1)$,
(2) $V(XY+1)$,
(3) $V(X^2Y-1)$,
(4) $V(X^2Y^2-1)$.

Aufgabe 5.2. Skizziere die folgenden Nullstellengebilde in $\mathbb{R}^2$.

(1) $V(X^2-Y^2)$,
(2) $V(X^2Y-XY^2)$,
(3) $V(X^2-XY^2)$,
(4) $V(X^2-Y^3)$,
(5) $V(X^2-Y^4)$.

Aufgabe 5.3. Bestimme die Nullstellenmenge der binomialen Gleichung $X^n = 1$ über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 5.4. Es sei K ein Körper, seien $a,b \in \mathbb{N}$ teilerfremde Zahlen und sei $X^a - Y^b \in K[X,Y]$ das zugehörige binomiale Polynom. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Das Polynom $X^a - Y^b$ ist irreduzibel.
(2) Es gibt eine bijektive polynomiale Abbildung
$$K \longrightarrow V(X^a - Y^b) \subseteq K^2,\ t \longmapsto (t^b, t^a).$$
(3) Bei $a,b \geq 2$ besitzt $V(X^a - Y^b)$ eine isolierte Singularität im Nullpunkt.

Aufgabe 5.5. Betrachte die durch
$$C = V\left(X^{d+1} - Y^d\right)$$
definierte algebraische Kurve C ($d \geq 1$). Zeige, dass man folgendermaßen, ausgehend von der Geraden $H = V(X-1)$, eine Parametrisierung von C erhält: Zu einem Punkt $P \in H$ bestimmt man die Verbindungsgerade G_P von P und dem Nullpunkt und den einzigen (?) vom Nullpunkt verschiedenen Punkt von $C \cap G_P$. Zeige, dass die Abbildung, die P auf diesen Punkt abbildet, algebraisch ist.

Aufgabe 5.6. Es sei K ein Körper, seien $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremde Zahlen und sei $X^a - Y^b \in K[X,Y]$ das zugehörige binomiale Polynom.

(1) Zeige, dass der durch $X \mapsto T^b$, $Y \mapsto T^a$, gegebene K-Algebrahomomorphismus
$$K[X,Y]/\left(X^a - Y^b\right) \longrightarrow K[T]$$
injektiv ist.
(2) Zeige, dass dieser Homomorphismus einen Isomorphismus
$$\left(K[X,Y]/\left(X^a - Y^b\right)\right)_X \longrightarrow K[T]_T$$
induziert.
(3) Man folgere, dass für jedes $c \in K$, $c \neq 0$, ein Isomorphismus von lokalen Ringen
$$\left(K[X,Y]/\left(X^a - Y^b\right)\right)_{(X-c^b, Y-c^a)} \longrightarrow K[T]_{(T-c)}$$
vorliegt.
(4) Zeige, dass der induzierte Homomorphismus
$$\left(K[X,Y]/\left(X^a - Y^b\right)\right)_{(X,Y)} \longrightarrow K[T]_{(T)}$$
kein Isomorphismus ist.

Ein wichtiger und suggestiver Ansatz, um die lokale Dimension einer (eingebetteten) Varietät $V \subseteq K^n$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K in einem Punkt $P \in V$ zu erfassen, ist es, V mit affin-linearen Unterräumen L unterschiedlicher Dimension, die durch den Punkt verlaufen, zu schneiden, und zu schauen, ob der Durchschnitt den Punkt isoliert, ob also in einer offenen Umgebung des Punktes $V \cap L = \{P\}$ gilt. Die lokale Dimension d im Punkt P ist dann definiert durch die Eigenschaft, dass es $n-d$-dimensionale lineare Räume durch den Punkt P gibt, die den Punkt isolieren, aber keine $n-d+1$-dimensionale Räume mit dieser Eigenschaft. Beispielsweise ist
$$P \in V \subseteq K^3$$
zweidimensional, wenn es Geraden gibt, die den Punkt herausschneiden, aber der Schnitt mit jeder Ebene den Punkt nicht herausschneidet.

Dieser Ansatz wird in Korollar 22.10 begründet. Einige der folgenden Aufgaben beruhen auf dieser Sichtweise. Man überprüfe diesen Ansatz auch für die Achsenraumkonfigurationen.

Aufgabe 5.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und
$$V = V(XY - Z^n) \subset \mathbb{A}^3_K.$$

(1) Zeige, dass der Durchschnitt von V mit jeder Ebene durch den Nullpunkt nicht nur aus endlich vielen Punkten besteht.
(2) Zeige, dass es Geraden durch den Nullpunkt derart gibt, dass der Durchschnitt $V \cap G$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Aufgabe 5.8. Es sei

$$V = V\left(Z^2 - X^2 - Y^2\right) \subset \mathbb{R}^3$$

der reelle Standardkegel. Zeige, dass es eine Ebene durch den Nullpunkt mit

$$V \cap E = \{(0,0,0)\}$$

gibt.

Aufgabe 5.9. Es sei

$$V = V\left(Z^2 - XY\right) \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeige, dass es eine Ebene durch den Nullpunkt mit

$$V \cap E = \{(0,0,0)\}$$

gibt.

Aufgabe 5.10.*

Sei

$$V = V(Z^2 - XY) \subset \mathbb{R}^3$$

und setze

$$V_+ = \{(x,y,z) \in V \setminus \{(0,0,0)\} |\, x, y \geq 0\}.$$

Zeige, dass

$$\mathbb{R}_+ \times S^1 \longrightarrow V_+,\ (\alpha, \theta) \longmapsto \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\sin\theta,\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\sin\theta,\ \frac{\alpha}{2}\cos\theta\right),$$

eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 5.11. Zeige, dass die $\mathbb{R}$-Algebren $\mathbb{R}[X,Y,Z]/(Z^2 - X^2 - Y^2)$ und $\mathbb{R}[X,Y,Z]/(Z^2 - XY)$ isomorph sind, aber nicht, wenn man Z auf Z abbildet.

Aufgabe 5.12. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V(f) \subseteq K^n$ die algebraische Hyperfläche zu einem nichtkonstanten Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Sei $P \in V$ ein Punkt. Zeige, dass es Geraden durch den Punkt P gibt, deren Durchschnitt mit V endlich ist. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit jeder Ebene durch den Punkt P nicht endlich ist (und dass P kein isolierter Punkt des Durchschnitts ist).

Aufgabe 5.13. Bestimme die singulären Punkte der durch $X^aY^b = Z^c$ gegebenen Hyperfläche im $\mathbb{C}^3$

Wir besprechen eine andere Sichtweise auf Beispiel 5.7.

AUFGABE 5.14. (1) Zeige, dass der Restklassenring
$$K[X,Y,Z]/(X-YZ,Y-XZ)$$
zum Restklassenring
$$K[X,Z]/\left(X-XZ^2\right)$$
isomorph ist.
(2) Bestimme die irreduziblen Komponenten von
$$V\left(X-XZ^2\right)\subseteq K^2.$$
(3) Bestimme die singulären Punkte von $V\left(X-XZ^2\right)$.

AUFGABE 5.15. Bestimme die irreduziblen Komponenten von
$$V\left(XY-Z^3,X^2Z-Y^2\right)\subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$$

AUFGABE 5.16. Betrachte das Ideal
$$\mathfrak{a}=\left(U^5-V^3,U^{11}-W^3,V^{11}-W^5\right)\subseteq K[U,V,W]$$
und das zugehörige Nullstellengebilde $Z=V(\mathfrak{a})\subseteq \mathbb{A}^3_K$. Zeige, dass $W-U^2V$ zum Radikal von $\mathfrak{a}$ gehört. Zeige damit, dass Z isomorph zu einer ebenen algebraischen Kurve ist.

AUFGABE 5.17. Zeige, dass in $K[X,Y]_{(X,Y)}/(X^2-Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

AUFGABE 5.18. Wir betrachten die beiden Abbildungen
$$(s,t)\longmapsto (s^2,t^2,st)=(x,y,z) \text{ und } (s,t)\longmapsto (s,st^2,st)=(x,y,z)\,.$$
Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

AUFGABE 5.19. Zeige, dass die Nullstellenmenge
$$V(XV-YU,YW-ZV,XW-ZU)\subseteq \mathbb{K}^6$$
wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 5.20. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und
$$V(XV-YU,YW-ZV,XW-ZU)\subseteq K^6.$$
(1) Zeige, dass der Durchschnitt $V\cap L$ mit dreidimensionalen Untervektorräumen $L\subset K^6$ nicht nur aus endlich vielen Punkten besteht.
(2) Zeige, dass es zweidimensionale Untervektorräume $L\subset K^6$ derart gibt, dass der Durchschnitt $V\cap L$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Aufgabe 5.21. Zeige, dass der K-Algebrahomomorphismus $K[X,Y,Z,U,V,W] \to K[X,Y,Z,T]$ mit

$$X \mapsto X,\ Y \mapsto Y,\ Z \mapsto Z,\ U \mapsto XT,\ V \mapsto YT,\ W \mapsto ZT,$$

das Ideal $(XV - YU, YW - ZV, XW - ZU)$ zum Kern gehört. Zeige, dass der induzierte Ringhomomorphismus

$$(K[X,Y,Z,U,V,W]/(XV - YU, YW - ZV, XW - ZU))_Z \longrightarrow K[X,Y,Z,T]_Z$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5.22. Zeige, dass das Ideal

$$(XV - YU, YW - ZV, XW - ZU) \subseteq K[X,Y,Z,U,V,W]$$

ein Primideal ist.

Aufgabe 5.23. Zeige, dass die in Beispiel 5.1 beschriebene Abbildung

$$\left(K^{\times}\right)^{n-1} \longrightarrow V\left(X_1 \cdots X_n - 1\right), (x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{1}{x_1 \cdots x_{n-1}}\right),$$

ein Gruppenisomorphismus (bezüglich der multiplikativen Strukturen) ist.

Aufgabe 5.24. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Abbildungsverzeichnis