Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 28

Aufgabe 28.1. Es sei

$$f(x,y) = -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (-3, 4)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x+3, v = y-4$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche auch Aufgabe 14.4.

Aufgabe 28.2. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^1$ offen, eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Zeige, das die folgenden Charakterisierungen einer Zahl r äquivalent sind.

(1) 0 ist eine r-fache Nullstelle von f.
(2) Es ist $f = x^r h$ mit h nullstellenfrei im Nullpunkt.
(3) Das Jacobiideal zu f in $\mathcal{O}_1$ ist (x^{r-1}).
(4) Die Milnorzahl zu f im Nullpunkt ist $r - 1$.
(5) f ist r-bestimmt, aber nicht $(r-1)$-bestimmt.

Aufgabe 28.3. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Zeige, das folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) 0 ist ein regulärer Punkt von f.
(2) Das Jacobiideal zu f in $\mathcal{O}_n$ ist das Einheitsideal.
(3) f ist 1-bestimmt

Aufgabe 28.4. Zeige, dass die Funktion XY 2-bestimmt ist.

Aufgabe 28.5. Bestimme die minimale Bestimmtheit von

$$f = X^3 - XY^2 + Y^4$$

mit Hilfe von Satz 28.2.

Aufgabe 28.6. Bestimme die minimale Bestimmtheit von
$$f = X^3 + X^2Y^2 - Y^3$$
mit Hilfe von Satz 28.2.

Aufgabe 28.7. Bestimme die minimale Bestimmtheit von
$$f = X^2 + Y^3 + Z^4$$
mit Hilfe von Satz 28.2.

Aufgabe 28.8. Bestimme die minimale Bestimmtheit von
$$f = X^2 + Y^3 + Z^5$$
mit Hilfe von Satz 28.2.

Bei der folgenden Aufgabe denke man auch an Satz 14.8.

Aufgabe 28.9. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und einer isolierten Singularität im Nullpunkt. Zeige, dass man Satz 28.2 in dieser Situation anwenden kann.

Aufgabe 28.10. Es definiere $f \in K[X,Y,Z]$ eine isolierte Singularität im Nullpunkt. Zwischen dem Jacobiideal J_f zu f und dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X,Y,Z)$ gelte die Beziehung $\mathfrak{m}^s \subseteq J_f$ mit $s \in \mathbb{N}_+$.

(1) Zeige, dass die Milnorzahl von f kleinergleich $\frac{s(s+1)(s+2)}{6}$ ist.
(2) Zeige, dass f $(s+1)$-bestimmt ist.

Aufgabe 28.11. Zeige, dass man für die Funktion
$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,y) \longmapsto x^2y,$$
Satz 28.2 nicht anwenden kann.

Aufgabe 28.12. Zeige, dass $X^2 + XY^3$ rechtsäquivalent zu $U^2 + V^6$ ist. Führe explizit eine polynomiale Variablentransformation durch.

Abbildungsverzeichnis