Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 26

Wir besprechen zuerst algebraische Automorphismen des affinen Raumes und Äquivalenzkonzepte für polynomiale Funktionen und Varietäten. Diese sind sehr viel starrer als die entsprechenden holomorphen Konzepte.

Aufgabe 26.1. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

deren Umkehrabbildung nicht polynomial ist.

Aufgabe 26.2. Zeige, dass ein K-Algebraautomorphismus

$$\varphi\colon K[X] \longrightarrow K[X]$$

durch $X \mapsto aX + b$ mit $a \neq 0$ gegeben ist (also durch eine affin-lineare Variablentransformation).

Aufgabe 26.3. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ (x, y) \longmapsto (x, y + F(x)),$$

ein Automorphismus des affinen Raumes ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Aufgabe 26.4. Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

Aufgabe 26.5. Es sei K ein Körper und sei $K[X, Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom in der einen Variablen X. Zeige, dass durch die Einsetzung $X \mapsto X$ und $Y \mapsto Y + P(X)$ ein K-Algebraautomorphismus von $K[X, Y]$ in sich definiert wird, der im Allgemeinen nicht linear ist.

Aufgabe 26.6. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$$

ein Automorphismus des affinen Raumes. Zeige, dass die Jacobi-Determinante konstant gleich einem $c \neq 0$ ist.

Aufgabe 26.7.*

Betrachte

$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x - 2(xz+y^2)y - (xz+y^2)^2 z, y + (xz+y^2)z, z)$.

Zeige, dass φ ein Automorphismus ist, der $y^2 + xz$ auf sich selbst abbildet.

Wir notieren zwei Definitionen, die algebraische Versionen der Rechtsäquivalenz sind.

Zwei Polynome

$$F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

heißen *algebraisch rechtsäquivalent*, wenn es einen polynomialen Automorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

mit $F = G \circ \varphi$ gibt.

Es sei $P \in U \subseteq V$ ein Punkt einer Varietät und

$$f_1, f_2\colon U \longrightarrow K$$

rationale Funktionen auf V, die in einer offenen Umgebung U von P definiert seien. Man sagt, dass f_1 zu f_2 *rational rechtsäquivalent* ist, wenn es offene Mengen $P \in V_1$ und $P \in V_2$ und einen Isomorphismus

$$\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$$

mit

$$f_1 = \varphi \circ f_2$$

gibt.

Aufgabe 26.8. Es sei $P = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ ein lineares Polynom $\neq 0$. Zeige, dass X_1 und P zueinander algebraisch rechtsäquivalent sind.

Aufgabe 26.9. Es sei P ein Polynom in den Variablen $X_2, \ldots, X_n$. Zeige, dass X_1 und $X_1 - P$ zueinander algebraisch rechtsäquivalent sind.

Aufgabe 26.10. Zeige, dass das Polynom $X^n - Y^2$, $n \geq 2$, nicht algebraisch rechtsäquivalent zur Variablen X ist.

Aufgabe 26.11. Zeige, dass die beiden Polynome X und $X(X+1)$ nicht zueinander rational rechtsäquivalent sind.

Aufgabe 26.12. Zeige, dass das Polynom $X^3 + Y^3 - 1$ nicht rational rechtsäquivalent zur Variablen X ist.

Aufgabe 26.13. Zeige, dass das Polynom $X^3 - Y^2$ nicht rational rechtsäquivalent zur Variablen X ist.

Aufgabe 26.14.*

Es sei $F \in K(X_1, \ldots, X_n)$ eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann rational rechtsäquivalent zur Variablen X ist, wenn es rationale Funktionen $F_2, \ldots, F_n$ derart gibt, dass die Körpergleichheit
$$K(F, F_2, \ldots, F_n) = K(X_1, \ldots, X_n)$$
gilt.

Die folgende Definition orientiert sich an den Nullstellenmengen, nicht an den Funktionen selbst.

Zwei affin-algebraische Mengen $V, \tilde{V} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ heißen *affin-algebraisch äquivalent*, wenn es einen Automorphismus des affinen Raumes $\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^n$ mit
$$\varphi^{-1}(V) = \tilde{V}$$
gibt.

Die folgende Aussage ist analog zu Lemma 26.3.

Aufgabe 26.15. Es seien
$$V, \tilde{V} \subset \mathbb{A}_K^n$$
zueinander affin-algebraisch äquivalente affin-algebraische Mengen mit den Verschwindungsidealen $\mathrm{Id}\,(V)$ und $\mathrm{Id}\,(\tilde{V})$. Zeige, dass dann die Restklassenringe $K[X_1, \ldots, X_n]/\,\mathrm{Id}\,(V)$ und $K[X_1, \ldots, X_n]/\,\mathrm{Id}\,(\tilde{V})$ zueinander isomorph sind.

In den folgenden Aufgaben wird verwendet, dass man eine Gleichung in den Variablen x, y, z birational trasformieren kann, indem man $x = x'z$ und $y = y'z$ setzt und die Gleichung in den neuen Variablen x', y', z schreibt. Damit kann man zeigen, dass die ADE-Singularitäten birational zur affinen Ebene sind, dass also ihre Funktionenkörper gleich $K(u, v)$.

Aufgabe 26.16. Zeige, dass die D_k-Singularitäten $Z^2 + X^2Y + Y^{k-1}$ ($k \geq 4$) birational zu $Z^2 + X^2Y + Y^{k-3}$ sind (die bei $k \geq 6$ wieder Diedersingularitäten sind). Zeige, dass $Z^2 + X^2Y + Y^1$ birational zur affinen Ebene ist und dass $Z^2 + X^2Y + Y^2$ birational zu $Z^2 + XY + Y^2$ und damit ebenfalls birational zur affinen Ebene ist.

Aufgabe 26.17. Zeige, dass die E_6-Singularität $X^2 + Y^3 + Z^4$ birational zu $X^2 + Y^3Z + Z^2$, zu $X^2 + YZ + Z^2$, zur $A1$-Singularität und damit zur affinen Ebene ist.

Aufgabe 26.18. Zeige, dass die E_7-Singularität $Z^2 + X^3 + XY^3$ birational zu $Z^2 + X^3Y + XY^2$, zu $Z^2 + X^2Y + XY^2$, zu $Z^2 + XY + XY^2$ und zu $Z^2 + Y + XY^2$ ist, und damit auch birational zur affinen Ebene ist.

Aufgabe 26.19. Zeige, dass die E_8-Singularität $X^2 + Y^3 + Z^5$ birational zu $X^2+Y^3Z+Z^3$, zu $X^2+Y^2Z+YZ^3$, zu $X^2+Y^2Z+YZ^2$ und zu $X^2+YZ+YZ^2$ ist, und damit auch birational zur affinen Ebene ist.

Aufgabe 26.20.*

Zeige, dass die rationalen Funktionen (in den zwei Variablen U und V)

$$P = \frac{-U^{15}}{(1+V)^7V^3},$$

$$Q = \frac{-U^{10}}{(1+V)^5V^2}$$

und

$$R = \frac{-U^6}{(1+V)^3V}$$

die Relation

$$P^2 + Q^3 + R^5 = 0$$

erfüllen.

Aufgabe 26.21.
(1) Zeige, dass die Singularität $X^2+Y^3+Z^6$ birational zu $X^2 + Y^3Z + Z^4$ und zu $X^2 + Y^3Z^2 + Z^2$ ist.
(2) Zeige, dass der Quotientenkörper von
$$K[X,Y,Z]/\left(X^2 + Y^3Z^2 + Z^2\right)$$
isomorph zu $(K[U,Y]/(U^2 + Y^3 + 1))(Z)$ ist.

Aufgabe 26.22. Zeige, dass die Rechtsäquivalenz zwischen holomorphen Funktionen in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 26.23. Es seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ offen und mit $f(0) = g(0) = 0$. Zeige, dass f und g genau dann rechtsäquivalent sind, wenn ihre Nullstellenordnung im Nullpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 26.24. Zeige, dass die zweidimensionalen ADE-Singularitäten nicht untereinander rechtsäquivalent sind.

Bei einem Großteil kann man mit der Milnorzahl argumentieren, ansonsten verwende man die lokale Fundamentalgruppe.

Aufgabe 26.25.*

Es seien $g_1\colon V \to \mathbb{C}$ und $g_2\colon V' \to \mathbb{C}$ mit $0 \in V, V' \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, holomorphe Funktionen mit $g_1, g_2 \in \mathfrak{m}^3$ in den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_n$ Es sei

$$\varphi\colon U \times V \longrightarrow W$$

eine biholomorphe Abbildung mit $U \subseteq \mathbb{C}^k$ und $W \subseteq \mathbb{C}^{k+n}$ offen und mit $\varphi(0) = 0$ und mit

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_1 = \left(z_1^2 + \cdots + z_k^2 + g_2\right) \circ \varphi.$$

Zeige, dass dann die $k \times k$-Untermatrix $(\partial_{x_i} \varphi_j)_{1 \leq i,j \leq k}$ der Jacobi-Matrix zu φ im Nullpunkt invertierbar ist.

Abbildungsverzeichnis