Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 25

Aufgabe 25.1. Sei R ein faktorieller Bereich. Zeige, dass jedes von 0 verschiedene Primideal ein Primelement enthält.

Aufgabe 25.2. Zeige, dass in einem faktoriellen Bereich R der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Elementen $f, g \in R$ existieren.

Aufgabe 25.3. Es sei R ein faktorieller Bereich und $a, b \in R$. Zeige, dass ab und das Produkt aus $\operatorname{kgV}(a, b)$ und $\operatorname{ggT}(ab)$ zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 25.4. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ Elemente in einem faktoriellen Bereich R und $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass

$$\operatorname{kgV}\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right) \text{ und } \left(\operatorname{kgV}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)^k$$

zueinander assoziiert sind.

b) Zeige, dass

$$\operatorname{ggT}\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right) \text{ und } \left(\operatorname{ggT}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)^k$$

zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 25.5. Sei R ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

Aufgabe 25.6. Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Zeige, dass jedes Element $f \in K$, $f \neq 0$, eine im Wesentlichen eindeutige Produktzerlegung

$$f = up_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$$

mit einer Einheit $u \in R$ und ganzzahligen Exponenten r_i besitzt.

Aufgabe 25.7. Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $a \in K$ ein Element mit $a^n \in R$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Zeige, dass dann schon a zu R gehört.

Aufgabe 25.8. Es sei $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ ein positiv-graduierter Integritätsbereich über einem Körper $R_0 = K$. Zeige, dass ein homogenes Element $f \neq 0$ vom Grad 1 irreduzibel ist.

Aufgabe 25.9. Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Man gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.

Aufgabe 25.10. Finde in den Koordinatenringen zu den A-Singularitäten, also in $K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$ zu $n \geq 2$, Elemente, die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 25.11. Finde in den Koordinatenringen zu den D-Singularitäten, also in $K[X,Y,Z]/(X^2 + YZ^2 + Y^{m+1})$ zu $m \geq 2$, Elemente, die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 25.12. Finde im Koordinatenring zur E_6-Singularität, also in

$$K[X,Y,Z]/\left(X^2 + Y^3 + Z^4\right) ,$$

Elemente, die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 25.13. Finde im Koordinatenring zur E_7-Singularität, also in

$$K[X,Y,Z]/\left(X^2 + Y^3 + YZ^3\right) ,$$

Elemente, die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 25.14. Finde in in $K[X,Y,Z,W]/(XY - ZW)$ Elemente, die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 25.15. Es sei R eine dreidimensionale endlich erzeugte K-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, die ein faktorieller Integritätsbereich sei. Zeige, dass für Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ der Höhe r bzw. s jedes minimale Primideal oberhalb von $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ eine Höhe $\leq r + s$ besitzt.

Aufgabe 25.16. Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich und seien

$$f, g \neq 0$$

Nichteinheiten. Zeige, dass es einen maximalen Exponenten n mit $f = g^n h$ gibt.

Aufgabe 25.17. Zeige, dass in einem Produktring $R \times S$ die Aussage aus Lemma 25.6 nicht gelten muss.

Der in der folgenden Aufgabe besprochene Ring zeigt, dass der Krullsche Hauptidealsatz, Lemma 25.5 und Lemma 25.6 für nichtnoethersche Integritätsbereiche nicht gelten muss.

Aufgabe 25.18. Sei K ein Körper und betrachte den kommutativen Ring

$$\begin{aligned} R &= K[X, Y_0, Y_1, Y_2, \ldots]/ (Y_0 - XY_1, Y_1 - XY_2, Y_2 - XY_3, \ldots) \\ &= K[X, Y_n, n \in \mathbb{N}]/ (Y_i - XY_{i+1}, i \in \mathbb{N}) . \end{aligned}$$

(1) Zeige, dass R ein Integritätsbereich ist.
(2) Zeige, dass X ein Primelement ist.
(3) Zeige, dass (X) ein maximales Ideal von R ist.
(4) Zeige, dass

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X^n) = (Y_j, j \in \mathbb{N})$$

gilt und dass dies ein Primideal ist, das nicht endlich erzeugt ist. Wie lautet der Restklassenring zu $\mathfrak{p}$?
(5) Zeige, dass die Krulldimension von R zumindest 2 ist.
(6) Zeige, dass Y_0 keine Faktorzerlegung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 25.19. Finde für die zweidimensionalen ADE-Singularitäten (gegeben durch den Ring R) Ringelemente $f \neq 0$ derart, dass die Nenneraufnahme R_f faktoriell ist.

Aufgabe 25.20. Zeige, dass der Ring $\mathbb{C}[X, Y]/ (X^3 + Y^3 + 1)$ regulär, aber nicht faktoriell ist.

Aufgabe 25.21. Zeige, dass es auf der E_8-Singularität keine glatte Kurve gibt, die durch den singulären Punkt läuft.

Aufgabe 25.22. Zeige, dass

$$X^3 + Y^3 - 3XY \in K[X, Y] \subseteq K[X, Y]_{(X,Y)}$$

ein Primelement ist, aber nicht im Ring $\mathcal{O}_2$ der holomorphen Funktionen in zwei Variablen. Wie lautet dort die Faktorzerlegung?

Abbildungsverzeichnis