Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 24

Aufgabe 24.1. Finde für den Restklassenring

$$K[X,Y,Z]/\left(Y-X^2, Z-XY\right)$$

eine endliche freie Auflösung als $K[X,Y,Z]$-Modul.

Aufgabe 24.2. Bestimme für $R = K[X]/(X^2)$ und den Restklassenkörper $R/(X) \cong K$ die minimale freie Auflösung als R-Modul.

Aufgabe 24.3. Bestimme für $R = K[X]/(X^n)$ und den Restklassenkörper $R/(X) \cong K$ die minimale freie Auflösung als R-Modul.

Aufgabe 24.4. Bestimme für das Achsenkreuz $R = K[X,Y]/(XY)$ und den Restklassenkörper K die minimale freie Auflösung als R-Modul.

Aufgabe 24.5. Bestimme für das Achsenkreuz $R = K[X,Y]/(XY)$ und den Restklassenring $R/(X) \cong K[Y]$ die minimale freie Auflösung als R-Modul.

Aufgabe 24.6. Bestimme für die Neilsche Parabel $R = K[X,Y]/(X^2-Y^3)$ und den Restklassenkörper K die minimale freie Auflösung als R-Modul.

Aufgabe 24.7. Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (\pi)$ und dem Quotientenkörper $Q = Q(R) = R_\pi$. Zeige, dass durch

$$0 \longrightarrow R^{(\mathbb{N})} \longrightarrow R^{(\mathbb{N})} \longrightarrow Q \longrightarrow 0\,,$$

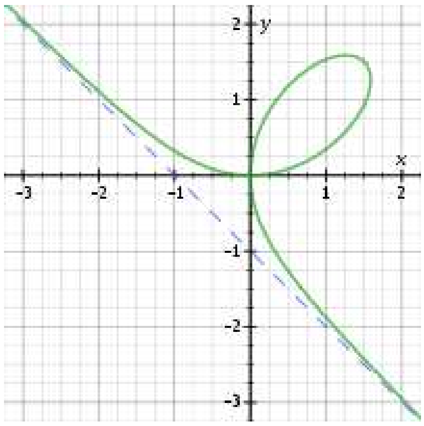
wobei rechts die Basiselemente e_n auf $\frac{1}{\pi^n}$ und links die Basiselemente f_n auf $e_n - \pi e_{n+1}$ abgebildet werden, eine endliche freie Auflösung des Quotientenkörpers Q gegeben ist.

Aufgabe 24.8. Es sei R ein lokaler artinscher Ring und $\varphi\colon F \to G$ ein Modulhomomorphismus zwischen den endlich erzeugten freien R-Moduls F und G. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn F ein direkter Summand von G ist.

Aufgabe 24.9. Zeige, dass $K[X,Y]_{(X,Y)}/\,(X^3+Y^3-3XY)$ ein Integritätsbereich ist und dass der entsprechende analytische Ring

$$\mathcal{O}_2/\left(X^3+Y^3-3XY\right)$$

nicht integer ist. Zeige ferner, dass dieser Ring isomorph zu $\mathcal{O}_2/\,(XY)$ ist.



Die folgenden Aufgaben zeigen, dass sich der Ring der stetigen Funktionen in verschiedener Hinsicht anders verhält als der Ring der holomorphen oder der Ring der polynomialen Funktionen. Siehe auch Beispiel 25.7.

Aufgabe 24.10. Sei $0 \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die Menge aller Paare

$$(U,f) \text{ mit } 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen und } f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

mit der Identifizierung

$$(U,f) \sim (V,g),$$

falls es eine offene Umgebung $0 \in W \subseteq U \cap V$ mit

$$f|_W = g|_W$$

gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Es sei R die Menge der Äquivalenzklassen zu $\sim$. Zeige, dass es auf R eine natürliche Struktur als kommutativer Ring gibt.
(3) Zeige, dass R ein lokaler Ring ist.

Diesen Ring nennt man den *Ring der Keime stetiger Funktionen*.

Aufgabe 24.11. Es sei R der Ring der Keime stetiger Funktionen in einem Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$. Zeige, dass es in R Nullteiler gibt.

Aufgabe 24.12.*

Es sei R der Ring der Keime stetiger Funktionen in Punkt $0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass in R das maximale Ideal nicht von X (also der Identität) erzeugt wird.

Aufgabe 24.13. Es sei $R = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ die Lokalisierung des Polynomringes am maximalen Ideal $(X_1, \ldots, X_n)$ und sei S der Ring der Keime stetiger Funktionen in Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass es einen natürlichen injektiven $\mathbb{R}$-Algebrahomomorphismus

$$R \longrightarrow S$$

gibt.

Aufgabe 24.14. Sei X ein topologischer Raum und $P \in X$ ein Punkt. Betrachte die Menge aller Paare

$$(U, f) \text{ mit } P \in U \subseteq X \text{ offen und } f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

mit der Identifizierung

$$(U, f) \sim (V, g),$$

falls es eine offene Umgebung $P \in W \subseteq U \cap V$ mit

$$f|_W = g|_W$$

gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Es sei R die Menge der Äquivalenzklassen zu $\sim$. Zeige, dass es auf R eine natürliche Struktur als kommutativer Ring gibt.
(3) Zeige, dass R ein lokaler Ring ist.

Diesen Ring nennt man den *Ring der Keime stetiger Funktionen* im Punkt $P \in X$.

Aufgabe 24.15. Es sei $P \in M$ ein Punkt einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass der Ring der Keime stetiger Funktionen in P als $\mathbb{R}$-Algebra isomorph zum Ring der Keime stetiger Funktionen in $0 \in \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 24.16. Sei X ein topologischer Raum und $Z \subseteq X$ eine Teilmenge. Betrachte die Menge aller Paare

$$(U, f) \text{ mit } Z \subseteq U \subseteq X \text{ offen und } f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

mit der Identifizierung

$$(U, f) \sim (V, g),$$

falls es eine offene Umgebung $Z \subseteq W \subseteq U \cap V$ mit

$$f|_W = g|_W$$

gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Es sei R die Menge der Äquivalenzklassen zu $\sim$. Zeige, dass es auf R eine natürliche Struktur als kommutativer Ring gibt.
(3) Zeige, dass R ein reduzierter Ring ist.

Diesen Ring nennt man den *Ring der Keime stetiger Funktionen* entlang Z.

Abbildungsverzeichnis