

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 21

AUFGABE 21.1. Zeige, dass zu $P \in V(X^a - Y^b)$ mit $a, b \geq 2$ und teilerfremd der lokale Ring $(K[X, Y]_{\mathfrak{m}_P}) / (X^a - Y^b)$ für $P = (0, 0)$ nicht regulär ist und für alle anderen Punkte regulär ist. Man gebe für $P = (1, 1)$ einen Erzeuger des maximalen Ideals an.

AUFGABE 21.2. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Erzeugern erzeugt werde, es sei $K[M]$ der Monoidring zu M über einem Körper K und es sei

$$R = K[M]_{\mathfrak{m}}$$

die Lokalisierung am maximalen Ideale $\mathfrak{m} = K[M_+] = \langle T^m, m \in M \rangle$. Zeige, dass R allein im Fall $M = \mathbb{N}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 21.3. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q . Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

AUFGABE 21.4. Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K . Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

AUFGABE 21.5.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 21.6.*

Sei K ein Körper und sei

$$\nu: (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \{f \in K^\times \mid \nu(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 21.7. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Es sei $K = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R . Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen R -Modulisomorphismus

$$(\pi^n)/(\pi^{n+1}) \longrightarrow K$$

gibt.

AUFGABE 21.8. Sei $R = K[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)}$. Bestimme mit Hilfe von Lemma 21.4, ob die folgenden Restklassenringe $R/(f_1, \dots, f_n)$ regulär sind (und von welcher Dimension).

- (1) $f_1 = 0$.
- (2) $f_1 = X + 3Y + Z^7 - XYZ^2$.
- (3) $f_1 = XY + X^2 - Y^3$.
- (4) $f_1 = X + Y^3$ und $f_2 = X + Z^5$.
- (5) $f_1 = 2X - 3Y + Y^2Z - XYZ$ und $f_2 = X + Z^4 - Y^{17}$.
- (6) $f_1 = 2X - 5Y + Z + XY - Z^3$, $f_2 = X - 3Y + Z + X^2Y^2Z^2$ und $f_3 = -3X + Z - Z^2 - XYZ^2$.

AUFGABE 21.9. Es sei R ein lokaler regulärer Ring der Dimension d mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d)$. Zeige, dass

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} = x_1^{\beta_1} \dots x_d^{\beta_d} = x^\beta$$

nur bei $\alpha = \beta$ gilt.

AUFGABE 21.10. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem für das maximale Ideal im lokalen Ring zum Punkt

$$(1, 0, 0, 1) \in V(XY - UV) \subseteq \mathbb{A}_K^4.$$

AUFGABE 21.11. Es sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge und $P \in V$ ein Punkt, in dem V die Dimension d besitzt. Es sei $\mathcal{O}_P$ der lokale Ring zu P . Zeige, dass $\mathcal{O}_P$ genau dann ein regulärer Ring ist, wenn es einen $(n - d)$ -dimensionalen linearen Raum $L = V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ derart gibt, dass im lokalen Ring die Beziehung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}_P$$

gilt.

AUFGABE 21.12. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über K . Zeige durch Induktion über n , dass jedes maximale Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$ von n Elementen erzeugt wird.

Ein noetherscher kommutativer Ring R heißt *regulär*, wenn jede Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ an einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ regulär ist.

AUFGABE 21.13. Es sei R ein regulärer lokaler Ring. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ regulär ist.

AUFGABE 21.14. Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Integritätsbereich und M ein R -Modul. Der $R/\mathfrak{m}$ -Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$ und der $Q(R)$ Vektorraum $M \otimes_R Q(R)$ habe die gleiche Dimension d . Zeige, dass M ein freier Modul vom Rang d ist.

AUFGABE 21.15. Sei p eine Primzahl und

$$K = \mathbb{Z}/(p)(U) \subseteq R = K[Y]/(Y^p - U).$$

Zeige, dass $R \cong K(Y)$ ist, dass R regulär ist und dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ nicht frei ist.

AUFGABE 21.16. Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Z}/(p) \subseteq \mathbb{Z}/(p)(X) \subseteq (\mathbb{Z}/(p)(X))[Y]/(Y^p - X)$$

zu einer Primzahl p .

- (1) Zeige, dass die hintere Körpererweiterung endlich, aber nicht separabel ist.
- (2) Zeige, dass $\{X\}$ eine Transzendenzbasis der Gesamterweiterung, aber keine separierende Transzendenzbasis ist.
- (3) Finde eine separierende Transzendenzbasis für die Gesamterweiterung.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5