Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 20

AUFGABE 20.1. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Ein Geradenstück I.
(2) Eine Kreislinie K.
(3) Eine Kreisscheibe D.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Unter dem *Produkt der topologischen Räume* X und Y versteht man die Produktmenge $X \times Y$ zusammen mit derjenigen Topologie (genannt *Produkttopologie*), bei der eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ genau dann offen ist, wenn man sie als Vereinigung von Produktmengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ schreiben kann.

AUFGABE 20.2. Es seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ die kleinste Topologie ist, bezüglich der die beiden Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ stetig sind.

AUFGABE 20.3. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

AUFGABE 20.4. Es seien X und Y diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

AUFGABE 20.5. Zeige, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ diffeomorph zu einem Produkt aus eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 20.6. Es seien $M_1 \subseteq N_1$ und $M_2 \subseteq N_2$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten. Zeige, dass ihr Produkt $M_1 \times M_2$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $N_1 \times N_2$ ist.

Aufgabe 20.7. Sei $0 < r < R$ und sei

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} .$$

Zeige, dass die Abbildung

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow T, \, (\varphi, \psi) \longmapsto ((R + r\cos\psi)\cos\varphi, (R + r\cos\psi)\sin\varphi, r\sin\psi)$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 20.8. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$M \times M \longrightarrow M \times M, \, (P,Q) \longmapsto (Q,P),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 20.9. Wir schließen an Bemerkung 18.1 an. Die Hintereinanderschaltung

$$V \times W \stackrel{f \times g}{\longrightarrow} K \times K \stackrel{+}{\longrightarrow} K$$

nennen wir $f \oplus g$. Zeige

$$f \oplus g \, = \, (f \otimes 1) + (1 \otimes g) \, .$$

Aufgabe 20.10.*

Sei K ein Körper und seien I und J endliche Indexmengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Abb}\,(I,K) \times \mathrm{Abb}\,(J,K) \longrightarrow \mathrm{Abb}\,(I \times J, K)\,, \, (f,g) \longmapsto f \otimes g,$$

mit

$$(f \otimes g)(i,j) \, := \, f(i) \cdot g(j)$$

multilinear ist.

Aufgabe 20.11. Es sei K ein Körper und seien X und Y endliche Mengen. Zeige, dass man jede Funktion

$$h \colon \, X \times Y \longrightarrow K$$

in der Form

$$h \, = \, \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit Funktionen $f_i \colon \, X \to K$ und $g_i \colon \, Y \to K$ schreiben kann.

Aufgabe 20.12. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man nicht jede Funktion

$$h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow K$$

in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{N} \to K$ und $g_i\colon \mathbb{N} \to K$ schreiben kann.

Aufgabe 20.13. Zeige, dass man nicht jede stetige Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit stetigen Funktionen $f_i, g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 20.14. Zeige, dass man die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2},$$

nicht in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit stetigen Funktionen $f_i, g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 20.15. Seien V und W affin-algebraische Mengen und sei $x \in V$ ein Punkt. Beschreibe das Ideal zu $x \times W$ im Koordinantering zu $V \times W$.

Aufgabe 20.16. Seien V und W affin-algebraische Mengen, sei $x \in V$ ein Punkt und sei

$$W \longrightarrow V \times W,\ y \longmapsto (x,y).$$

Beschreibe diese Abbildung auf der Ebene der Koordinatenringe.

Aufgabe 20.17. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien V und W affin-algebraische Mengen über K der Dimension r bzw. s. Zeige, dass die Produktvarietät die Dimension $r+s$ besitzt.

Aufgabe 20.18. Man gebe ein Beispiel für eine Kurve $C \subseteq \mathbb{A}_K^n$ derart, dass es auf ihr Punkte $P_1, P_2, P_3 \in C$ gibt, deren Einbettungsdimensionen gleich $1, 2, 3$ sind.

Aufgabe 20.19. Es sei R der lokale Ring zum Überkreuzungspunkt des dreidimensionalen Achsenkreuzes. Bestimme dessen Einbettungsdimension.

Aufgabe 20.20. Es sei R ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul mit einer Summenzerlegung $M = M_1 \oplus M_2$. Zeige, dass für die minimale Erzeugendenzahl die Beziehung

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$$

gilt.

Aufgabe 20.21. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Es gebe ein R-Modul-Erzeugendensystem von L mit k Elementen und ein R-Modul-Erzeugendensystem von N mit n Elementen. Zeige, dass es ein R-Modul-Erzeugendensystem von M mit $k+n$ Elementen gibt.

Aufgabe 20.22.*

Es sei R ein noetherscher lokaler Ring. Man gebe ein Beispiel für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

von endlich erzeugten R-Moduln derart, dass für die minimale Erzeugendenzahl

$$\mu(M) \neq \mu(M_1) + \mu(M_2)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis