

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 19

AUFGABE 19.1. Man gebe für die Ringe der zweidimensionalen ADE-Singularitäten jeweils eine Primidealkette der Länge 2 an.

AUFGABE 19.2. Man gebe für den Ring $K[X, Y, Z, W]/(XY - ZW)$ eine Primidealkette der Länge 3 an.

AUFGABE 19.3. Sei R ein kommutativer Ring von endlicher Krulldimension d . Zeige, dass die Krulldimension des Polynomrings $R[X]$ mindestens $d + 1$ ist.

AUFGABE 19.4. Betrachte $X^2 + Y^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Die Nullstellenmenge $V(X^2 + Y^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ besteht aus dem einzigen Punkt $(0, 0)$, durch die eine Gleichung geht also die Dimension von 2 auf 0 runter. Warum widerspricht das nicht dem Krullschen Hauptidealsatz?

AUFGABE 19.5. Es sei K ein Körper und

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n) \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$$

ein Punktideal im Polynomring. Zeige, dass die Höhe von $\mathfrak{m}$ gleich n ist.

AUFGABE 19.6.*

Es sei K ein Körper und $\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal im Polynomring. Zeige, dass es eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ und ein Punktideal

$$\mathfrak{n} = (X_1 - b_1, \dots, X_n - b_n) \subset L[X_1, \dots, X_n]$$

derart gibt, dass

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap K[X_1, \dots, X_n]$$

ist.

AUFGABE 19.7. Begründe, dass $K[x, y] \subseteq K[x, y, z]/(xy - z^n)$ endlich ist. Wie sieht es über $K[x, z]$ bzw. $K[y, z]$ aus?

AUFGABE 19.8. Begründe, dass $K[y, z] \subseteq K[x, y, z]/(x^2 + yz^2 + z^{m+1})$ endlich ist. Wie sieht es über $K[x, y]$ bzw. $K[x, z]$ aus?

AUFGABE 19.9. Es sei $R \subseteq S$ eine endliche Ringerweiterung und $f \in S$ ein Nichtnullteiler. Zeige, dass $R \cap (f)$ nicht das Nullideal ist.

AUFGABE 19.10. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass

$$R \subseteq R[X]/(X^2) =: S$$

eine endliche Ringerweiterung ist und dass die Restklasse $[X] \in S$ nicht 0 ist, dass aber $R \cap ([X])$ das Nullideal ist.

AUFGABE 19.11. Zeige, dass

$$K[X + Y] \subseteq K[X, Y]/(XY)$$

endlich ist.

AUFGABE 19.12. (1) Zeige, dass

$$K[X + Y, Z] \subseteq K[X, Y, Z]/(XY, XZ)$$

endlich ist.

- (2) Zeige, dass $X + Y$ und Z algebraisch unabhängige Elemente in $K[X, Y, Z]/(XY, XZ)$ sind.
- (3) Bestimme für die beiden minimalen Primideale (X) und (Y, Z) die Durchschnitte mit $K[X + Y, Z]$.

AUFGABE 19.13. Zeige durch ein Beispiel, dass Korollar 19.8 nicht gilt, wenn man beliebige Nenneraufnahmen erlaubt.

AUFGABE 19.14. Zeige durch ein Beispiel, dass Korollar 19.8 nicht gilt, wenn man Algebren betrachten, die nicht vom endlichen Typ sind.

AUFGABE 19.15. Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul der Dimension d . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d! \frac{\dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}^n M)}{n^d}$$

existiert und mit der Hilbert-Samuel-Multiplizität von M übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3