**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2019**

# Singularitätentheorie

## Arbeitsblatt 18

Aufgabe 18.1. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem endlichdimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Zeige

$$V_{i+1}/V_i \cong K$$

für $i = 0, \ldots, n-1$.

Aufgabe 18.2. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$. Wir betrachten $V$ als reellen Vektorraum der reellen Dimension $2n$. Zeige, dass es reelle Untervektorräume

$$W_i \subseteq V$$

derart gibt, dass

$$0 \subset W_1 \subset V_1 \subset W_2 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset W_n \subset V_n$$

eine reelle Fahne ist.

Aufgabe 18.3.*

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

derart gibt, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $M_i$ die Dimension $i$ besitzt.

Aufgabe 18.4. Sei $R$ ein Hauptidealbereich, der kein Körper sei. Zeige, dass die Krulldimension von $R$ gleich eins ist.

Aufgabe 18.5. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeige, dass die Dimension von $\mathfrak{p}$ gleich der Dimension des Restklasssenringes $R/\mathfrak{p}$ ist.

Aufgabe 18.6. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeige, dass die Höhe von $\mathfrak{p}$ gleich der Dimension der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 18.7. Sei $R$ ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) $R$ hat Krulldimension 0.
(2) $R$ ist ein artinscher Ring.
(3) $R$ besitzt endlich viele Primideale, die alle maximal sind.
(4) Es gibt eine natürliche Zahl $n$ mit $\mathfrak{m}^n = 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$.
(5) Die Reduktion von $R$ ist ein Produkt von Körpern.

Aufgabe 18.8. Es sei $\varphi \colon R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus zwischen den Integritätsbereichen $R$ und $S$. Die Krulldimension dieser Ringe sei endlich und gleich. Zeige, dass dann $\varphi$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 18.9. Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Zeige, dass aus $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ folgt, dass $\mathfrak{m}^n = 0$ ist.

## Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3