

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 13

AUFGABE 13.1. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$A = R[X_1, \dots, X_n] / (X_n - f(X_1, \dots, X_{n-1}))$$

mit einem Polynom $f \in R[X_1, \dots, X_{n-1}]$ (die Nullstellenmenge ist also der Graph zu f). Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass $\Omega_{A|R}$ ein freier A -Modul vom Rang $n - 1$ ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Tensorprodukt von Moduln und von Algebren, siehe auch den Anhang.

AUFGABE 13.2. Berechne $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(5)$.

AUFGABE 13.3. Berechne das Tensorprodukt

$$(\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/(2))^2 \oplus \mathbb{Z}/(3)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4)).$$

AUFGABE 13.4. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige die R -Modulisomorphie

$$R^n \otimes_R R^m \cong R^{nm}.$$

AUFGABE 13.5. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ seien Ideale. Zeige die R -Algebraisomorphie

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} = R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

AUFGABE 13.6. Es sei R ein kommutativer Ring und $S, T \subseteq R$ seien multiplikative Systeme. Zeige die R -Algebraisomorphie

$$R_S \otimes_R R_T = R_{S \cdot T}.$$

AUFGABE 13.7. Es seien M und N kommutative Monoide und R ein kommutativer Ring. Zeige die R -Algebraisomorphie

$$R[M \times N] \cong R[M] \otimes_R R[N].$$

2

AUFGABE 13.8.*

Es sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige

$$\Omega_{A_S|A} = 0.$$

AUFGABE 13.9. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R -Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann

$$\Omega_{A_S|R} \cong (\Omega_{A|R})_S$$

gilt.

AUFGABE 13.10. Beschreibe für $A = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ den Modul der Kähler-Differentiale mit Erzeugern und Relationen.

AUFGABE 13.11. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$ mit Hilfe von Korollar 13.2.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3