Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 12

Aufgabe 12.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f^n) = nf^{n-1}D(f)$$

für jedes $f \in A$.

Aufgabe 12.2. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Zeige

$$D(f_1 \cdots f_r) = f_2 \cdots f_r D(f_1) + f_1 f_3 \cdots f_r D(f_2) + \cdots + f_1 \cdots f_{r-1} D(f_r)$$

für $f_1, \ldots, f_r \in A$.

Aufgabe 12.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul und $D\colon A \to M$ eine R-Derivation. Es sei $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \in A$. Zeige

$$\begin{aligned} D(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) &= n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r} D(x_1) + \cdots \\ &\quad + n_r x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r-1} D(x_r) \end{aligned}$$

Aufgabe 12.4. Es sei A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Zeige, dass die Menge der Derivationen von R nach M ein R-Modul wird, wenn man $f\delta$ durch

$$(f\delta)(a) = f\delta(a)$$

definiert.

Aufgabe 12.5. Es sei R eine kommutative K-Algebra und $W \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $D\colon R \to R$ eine K-Derivation. Zeige, dass durch

$$D\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$$

eine Derivation auf der Nenneraufnahme R_W gegeben ist, die D fortsetzt.

Aufgabe 12.6.*

Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R. Zu $f \in A$ bezeichne

$$\mu_f \colon A \longrightarrow A,\, x \longmapsto fx,$$

die R-lineare Multiplikationsabbildung und zu zwei R-linearen Abbildungen

$$\varphi_1, \varphi_2 \colon A \longrightarrow A$$

bezeichne

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1 .$$

Es sei $\delta \colon A \to A$ eine R-Derivation. Zeige, dass zu jedem $g \in A$ die Abbildung $[\delta, \mu_g]$ eine Multiplikationsabbildung ist.

Aufgabe 12.7. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Zeige, dass die universelle Derivation

$$A \longrightarrow \Omega_{A|R},\, f \longmapsto df,$$

eine Derivation ist.

Aufgabe 12.8. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$.

Aufgabe 12.9. Sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

Aufgabe 12.10. Bestimme $\Omega_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]|\mathbb{Z}}$.

Abbildungsverzeichnis