

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 12

AUFGABE 12.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R -Algebra, M ein R -Modul und $D: A \rightarrow M$ eine R -Derivation. Zeige

$$D(f^n) = n f^{n-1} D(f)$$

für jedes $f \in A$.

AUFGABE 12.2. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R -Algebra, M ein R -Modul und $D: A \rightarrow M$ eine R -Derivation. Zeige

$$D(f_1 \cdots f_r) = f_2 \cdots f_r D(f_1) + f_1 f_3 \cdots f_r D(f_2) + \cdots + f_1 \cdots f_{r-1} D(f_r)$$

für $f_1, \dots, f_r \in A$.

AUFGABE 12.3. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R -Algebra, M ein R -Modul und $D: A \rightarrow M$ eine R -Derivation. Es sei $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \in A$. Zeige

$$D(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r} D(x_1) + \cdots + n_r x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r-1} D(x_r)$$

AUFGABE 12.4. Es sei A eine kommutative R -Algebra und M ein A -Modul. Zeige, dass die Menge der Derivationen von R nach M ein R -Modul wird, wenn man $f\delta$ durch

$$(f\delta)(a) = f\delta(a)$$

definiert.

AUFGABE 12.5. Es sei R eine kommutative K -Algebra und $W \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $D: R \rightarrow R$ eine K -Derivation. Zeige, dass durch

$$D\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$$

eine Derivation auf der Nenneraufnahme R_W gegeben ist, die D fortsetzt.

AUFGABE 12.6.*

Es sei A eine kommutative R -Algebra über einem kommutativen Ring R . Zu $f \in A$ bezeichne

$$\mu_f: A \longrightarrow A, x \longmapsto fx,$$

die R -lineare Multiplikationsabbildung und zu zwei R -linearen Abbildungen

$$\varphi_1, \varphi_2: A \longrightarrow A$$

bezeichne

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

Es sei $\delta: A \rightarrow A$ eine R -Derivation. Zeige, dass zu jedem $g \in A$ die Abbildung $[\delta, \mu_g]$ eine Multiplikationsabbildung ist.

AUFGABE 12.7. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R -Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Zeige, dass die universelle Derivation

$$A \longrightarrow \Omega_{A|R}, f \longmapsto df,$$

eine Derivation ist.

AUFGABE 12.8. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$.

AUFGABE 12.9. Sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

AUFGABE 12.10. Bestimme $\Omega_{\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}}$.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3