Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 11

Aufgabe 11.1.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ teilerfremd und

$$K^\times \times K^2 \longrightarrow K^2,\, (t, (x, y)) \longmapsto \left(t^a x,\, t^b y\right),$$

die zugehörige Operation der Einheitengruppe auf der Ebene K^2. Zeige, dass neben dem Nullpunkt die Bahnen der Operation die Form

$$V\left(cX^b - dY^a\right) \setminus \{(0, 0)\}$$

haben, wobei ein Koeffizient c oder d als 1 gewählt werden kann.

Aufgabe 11.2. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ teilerfremd und

$$V = V\left(Z^a - W^b\right) \subseteq K^2.$$

Zeige, dass die bijektive Abbildung

$$K \longrightarrow V,\, t \longmapsto \left(t^b,\, t^a\right),$$

mit den Operationen der Einheitengruppe $K^\times$ verträglich ist, wenn $K^\times$ auf K durch Multiplikation wirkt und auf V durch Einschränkung der Operation

$$K^\times \times K^2 \longrightarrow K^2,\, (t, (z, w)) \longmapsto \left(t^b z,\, t^a w\right).$$

Aufgabe 11.3. Zeige, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + 3y_1y_2^2 = 0,$$
$$2x_1x_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1,$$

im $\mathbb{R}^4$ eine reelle eindimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 11.4. Es sei $V\left(Z^a - W^b\right) \subseteq \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ mit a, b teilerfremd. Beschreibe V durch zwei reelle Gleichungen in vier reellen Variablen. Beschreibe $V \cap S^3$ durch drei reelle Gleichungen in vier reellen Variablen und zeige, dass dies eine eindimensionalen reelle Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 11.5. Wir betrachten die Normalisierung
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow V\left(X^2Z - Y^2\right) \subseteq \mathbb{R}^3,\ (x,u) \longmapsto \left(x,\, xu,\, u^2\right),$$
des reellen Whitney-Regenschirms, siehe Beispiel 5.6. Bestimme die Einschränkung dieser Abbildung auf die Sphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Kann man das Bild dieser Einschränkung algebraisch beschreiben?

Aufgabe 11.6.*

Wir betrachten die reelle algebraische Kurve
$$C = V\left(Y^4 - Y^2 + X^2\right) \subset \mathbb{R}^2.$$
Zeige, dass durch
$$[0, 2\pi[\longrightarrow C,\ \theta \longmapsto (\sin\theta\cos\theta,\, \sin\theta),$$
eine Parametrisierung von C gegeben ist, die surjektiv und abgesehen von einem Punktepaar injektiv ist.

Aufgabe 11.7. Bestimme die Fundamentalgruppe der reellen algebraischen Kurve
$$C = V\left(Y^4 - Y^2 + X^2\right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 11.8. Es sei X ein nichtkompakter Hausdorffraum. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten kompakten Raum Y derart gibt, dass $X \subseteq Y$ offen ist und $Y \setminus X$ aus einem einzigen Punkt besteht.

In der vorstehenden Aufgabe spricht von der *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Aufgabe 11.9. Zeige, dass die Ein-Punkt-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ die Sphäre S^n ist.

Aufgabe 11.10. Zeige, dass der im Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis
$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$
trivial ist.

Aufgabe 11.11. Zeige, dass eine Ellipse $E \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ trivial ist, wobei V eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 11.12. Beschreibe den Torus $S^1 \times S^1$ als Rotationsmenge im $\mathbb{R}^3$.

Abbildungsverzeichnis