Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 10

Aufgabe 10.1. Zeige, dass sich die folgenden Objekte in natürlicher Weise entsprechen.

(1) Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}^r$ nach $\mathbb{Z}$.
(2) $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismen
$$\mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_r, X_r^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[T, T^{-1}]$$
der Form
$$X_i \longmapsto T^{a_i}$$
mit $a_j \in \mathbb{Z}$.
(3) Multiplikative Abbildungen von $\mathbb{C}^\times$ nach $(\mathbb{C}^\times)^r$ der Form
$$z \longmapsto (z^{a_1}, \ldots, z^{a_r})$$
mit $a_j \in \mathbb{Z}$.
(4) Monoidhomomorphismen von $\mathbb{N}^r$ nach $\mathbb{Z}$.
(5) Multiplikative Abbildungen von $\mathbb{C}^\times$ nach $\mathbb{C}^r$ der Form
$$z \longmapsto (z^{a_1}, \ldots, z^{a_r})$$
mit $a_j \in \mathbb{Z}$.
(6) Stetige Abbildungen
$$[0, 2\pi] \longrightarrow \left(\mathbb{C}^\times\right)^r$$
der Form
$$s \longmapsto \left(e^{a_1 \mathrm{i} s}, \ldots, e^{a_r \mathrm{i} s}\right)$$
$a_j \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 10.2. Es sei $M \in \mathrm{Mat}_{s \times r}(\mathbb{Z})$ eine $s \times r$-Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten. Es sei $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^s$ der zugehörige Gruppenhomomorphismus,
$$\mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_r, X_r^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[Y_1, Y_1^{-1}, \ldots, Y_s, Y_s^{-1}],\ X_j \longmapsto Y^{m_j},$$
der zugehörige $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus, wobei m_j die j-te Spalte von M ist und
$$\left(\mathbb{C}^\times\right)^s \longrightarrow \left(\mathbb{C}^\times\right)^r,\ (y_1, \ldots, y_s) \longmapsto (y^{m_1}, \ldots, y^{m_r}),$$
die zugehörige multiplikative Abbildung. Zeige, dass die transponierte Matrix die natürliche Abbildung zwischen den Fundamentalgruppen beschreibt, dass also
$$\mathbb{Z}^s \cong \pi\left(\left(\mathbb{C}^\times\right)^s, (1, \ldots, 1)\right) \longrightarrow \mathbb{Z}^r \cong \pi\left(\left(\mathbb{C}^\times\right)^r, (1, \ldots, 1)\right)$$
durch M^{tr} gegeben ist.

Es seien G_1, G_2, G_3 Gruppen. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von Gruppen, wenn G_1 ein Normalteiler von G_2 ist und wenn G_3 isomorph zur Restklassengruppe G_2/G_1 ist.

Aufgabe 10.3. Es sei $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(a) \longrightarrow 0\,.$$

Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(a), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ \mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow E \cong \mathbb{Z}/(a) \longrightarrow 0$$

führt.

Aufgabe 10.4. Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz. Zeige, dass dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^m \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

führt, wobei die Abbildung rechts nicht surjektiv sein muss.

Die nächste Aufgabe beruht auf dem Elementarteilersatz.

Aufgabe 10.5. Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz, wobei D endlich ist. Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

führt, wobei E isomorph zu D ist.

Aufgabe 10.6. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe einer kommutativen Gruppe G und sei $\varphi \colon H \to \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass es einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{Q}$ gibt, der φ (als Abbildung nach $\mathbb{Q}$) fortsetzt.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der R-Modul

$$M^* = \operatorname{Hom}_R(M,R)$$

heißt der *duale Modul* zu M.

Aufgabe 10.7. Es sei R ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln L, M, N. Zeige, dass dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow M^* \longrightarrow L^*$$

der dualen Moduln führt.

Ein R-Modul M über einem Integritätsbereich heißt *Torsionsmodul*, wenn es zu jedem $v \in M$ ein $r \in R$, $r \neq 0$, mit $rv = 0$ gibt.

Aufgabe 10.8. Sei R ein Integritätsbereich und sei M ein R-Torsionsmodul. Zeige, dass der duale Modul $M^* = 0$ ist.

Aufgabe 10.9. Es sei M ein endlich erzeugtes Monoid und

$$\gamma \colon M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Monoidhomomorphismus mit der zugehörigen Spektrumsabbildung

$$\mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T,T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\operatorname{Spek}(\mathbb{C}[M]))_{\mathbb{C}}$$

und dem induzierten stetigen geschlossenen Weg

$$S^1 \longrightarrow (\operatorname{Spek}(\mathbb{C}[M]))_{\mathbb{C}}\,.$$

Zeige, dass dieser Weg nullhomotop ist, wenn der Monoidhomomorphismus γ durch $\mathbb{N}$ faktorisiert.

Aufgabe 10.10. Es sei M das punktierte Spektrum zu $R = \mathbb{C}[U,V,Z]/(U^2+V^2-Z^2)$. Man gebe einen expliziten Erzeuger der Fundamentalgruppe von M an.

Aufgabe 10.11. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, deren Einträge allesamt Einheitswurzeln ξ_j in einem Körper K seien. Zeige, dass die zugehörige lineare Operation der von A erzeugten zyklischen Gruppe auf dem $K^n \setminus \{0\}$ genau dann fixpunktfrei ist, wenn die Ordnungen der ξ_j übereinstimmen.

Aufgabe 10.12. Zeige, dass der Veronese-Ring $K[U,V]^{(s)}$ als K-Algebra durch $s+1$ Elemente $Z_0, Z_1, \ldots, Z_s$ erzeugt wird derart, dass sämtliche 2×2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{s-2} & Z_{s-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{s-1} & Z_s \end{pmatrix}$$

Relationen zwischen diesen Erzeugern sind.

Aufgabe 10.13. Bestimme die minimale Anzahl eines Erzeugendensystems für den Veronese-Ring $K[X_1, \ldots, X_n]^{(s)}$.

Aufgabe 10.14.*

Es sei A eine $\mathbb{Z}$-graduierte R-Algebra und $s \in \mathbb{N}_+$. Es sei vorausgesetzt, dass R eine s-te primitive Einheitswurzel enthalte. Zeige, dass $A^{(s)}$ der Invariantenring unter der natürlichen Operation der Charaktergruppe $(\mathbb{Z}/(s))^\vee$ ist.

Aufgabe 10.15.*

Es sei K ein Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $s \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Veronese-Ring $R^{(s)}$ der Monoidring zum Monoid

$$M = \left\{ m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n | \sum_{i=1}^n m_i \in \mathbb{N}s \right\} \subseteq \mathbb{N}^n$$

ist.

Aufgabe 10.16. Es sei K ein Körper und A eine $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra, auf der eine Gruppe G als Gruppe von homogenen K-Algebrahomomorphismen operiere. Zeige

$$\left(A^{(s)}\right)^G = \left(A^G\right)^{(s)}.$$

Aufgabe 10.17. Wir betrachten die lineare Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(5)$ auf $\mathbb{C}^3$ durch Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^3 \end{pmatrix},$$

wobei ξ eine fünfte primitive Einheitswurzel sei. Bestimme den Invariantenring zu dieser Operation. Man gebe einen expliziten Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe des Spektrums dieses Invariantenringes an.

Aufgabe 10.18. Wir betrachten die lineare Operation der symmetrischen Gruppe S_2 auf dem $\mathbb{C}^2$ und es sei

$$\mathbb{C}^2 \setminus T \longrightarrow \left(\mathbb{C}^2 \backslash S_2\right) \setminus q(T)$$

die zugehörige Quotientenabbildung, wobei T der Fixraum der Operation sei. Beschreibe die induzierte Abbildung der Fundamentalgruppen.

Aufgabe 10.19. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine nichttriviale Reflektionsgruppe. Zeige, dass zu einer fixpunktfreien, offenen G-invarianten Teilmenge $U \subseteq K^n$ das Komplement $K^n \setminus U$ eine Dimension $\geq n-1$ besitzt.

Eine endliche Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K heißt *klein*, wenn sie keine Pseudoreflektion enthält.

Aufgabe 10.20. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine kleine Gruppe. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \left(\mathrm{Spek}\left(K[X_1, \ldots, X_n]^G\right)\right)_{\mathbb{C}}$ gibt, deren Fundamentalgruppe gleich G ist.

Aufgabe 10.21. Wir betrachten die lineare Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(3)$ auf $\mathbb{C}^4$ durch Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix},$$

wobei ξ eine dritte primitive Einheitswurzel sei. Bestimme den Invariantenring zu dieser Operation. Man gebe einen expliziten Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe des Spektrums dieses Invariantenringes an.

Aufgabe 10.22. Zeige, dass der singuläre Ort der affinen Varietät

$$V\left(A^2 - BCD\right) \subseteq \mathbb{A}^4_K$$

(über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) aus drei Geraden besteht, und dass diese die Bilder der Koordinatenachsen des $\mathbb{A}^3_K$ unter der in Beispiel 10.6 besprochenen Quotientenabbildung sind.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7