Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 1

Aufgaben

Aufgabe 1.1. Nehmen Sie ein Blatt Papier und basteln Sie sich ihre Lieblingssingularität, indem sie das Papier zerknüllen (nicht reißen) und gewisse Punkte miteinander verkleben. Modellieren Sie den Vorgang als eine (stetige, polynomiale?) Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 1.2. Betrachte die Bildergalerie in der Eingangsebene vom Mathematikgebäude in Osnabrück. Wo sind die singulären Punkte? Wie sehen die Gleichungen aus?

Aufgabe 1.3. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und den Fasern von φ an.

Aufgabe 1.4. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von φ an.

Aufgabe 1.5.*

Beweise den Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer linearen surjektiven Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

Aufgabe 1.6.*

Betrachte die beiden reellen Kurven

$$V(X^5 - X^3 + 2XY + 7Y^2 - 9)$$

im Punkt $(1, 1)$ und

$$V(X^4 + Y^4 - 3X^2Y^2 + 5X + 7X)$$

im Nullpunkt. Sind diese beiden Kurven lokal in den angegebenen Punkten zueinander diffeomorph?

Aufgabe 1.7.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion.

a) Realisiere den Graphen von f als Faser zu einer Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

über 0.

b) Sei f stetig differenzierbar. Zeige, dass die Punkte auf dem Graphen von f regulär sind.

Aufgabe 1.8. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

Aufgabe 1.9. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt? Wie sieht es aus, wenn φ ein Polynom ist?

Aufgabe 1.10. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

AUFGABE 1.11.*

Zeige, dass die Menge

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^4 + z^6 = 1 \right\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 1.12.*

Sei $R > 0$ und betrachte die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 .$$

Bestimme die regulären Punkte der Abbildung und die Gestalt der Faser über $s \in \mathbb{R}$. Wie ändert sich die Gestalt beim Übergang von $\sqrt{s} < R$ zu $\sqrt{s} > R$.

AUFGABE 1.13. Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 - y^3 ,$$

in jedem Punkt $P = (x, y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P = (x, y)$ eine offene Umgebung $(x, y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P ,$$

gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 1.14. Zeige, dass die Abbildung

$$[0, 2\pi[\longrightarrow S^1, \, t \longmapsto (\cos t, \, \sin t)$$

zwischen dem halboffenen Intervall $[0, 2\pi[$ und dem Einheitskreis

$$S^1 \ = \ \left\{ P \in \mathbb{R}^2 | \ || P || = 1 \right\}$$

stetig und bijektiv ist, dass die Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

AUFGABE 1.15. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die die Umkehrabbildung stetig, aber nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 1.16. Es sei $f(x, y, z) \ = \ x^a + y^b + z^c$, wobei alle Exponenten gerade ≥ 2 seien und es sei

$$Z \ := \ f^{-1}(0) \ \subset \ \mathbb{R}^3$$

die Faser über 0. Zeige, dass $Z \setminus \{0, 0, 0\}$ nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 1.17. Es sei $f(x, y, z) = x^a + y^b + z^c$, wobei alle Exponenten ≥ 1 seien und zumindest ein Exponent ungerade sei. Es sei

$$Z := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$$

die Faser über 0. Definiere eine Homöomorphie (also stetig bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung) zwischen $\mathbb{R}^2$ und Z. Zeige, dass diese nicht überall differenzierbar ist (Ausnahmen)?

Aufgabe 1.18. Zeige, dass auf dem durch $X^2 + Y^2 - Z^2$ gegebenen Kegel Geraden liegen, die durch die Singularität laufen.

Aufgabe 1.19. Es sei $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^6$ und $Z := f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$ die Faser über 0. Zeige, dass durch

$$\gamma\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3,\ t \longmapsto (\mathrm{i}t^3, 0, t),$$

eine injektive stetig differenzierbare Kurve gegeben ist, deren Bild ganz in Z liegt und die durch die isolierte Singularität von Z läuft.

Bemerkung: Die beiden vorstehenden Aufgaben kann man so interpretieren, dass man die durch $X^2 + Y^2 - Z^2$ und die durch $X^2 + Y^3 + Z^6$ gegebene Singularität entlang einer glatten Kurve durchwandern kann. Die durch $X^2 + Y^3 + Z^5$ gegebene Singularität kann nicht längs einer glatten Kurve durchwandert werden.

Aufgabe 1.20. Bestimme den Fixkörper des rationalen Funktionenkörper $K(U, V)$ zur Gruppe, die neben der Identität aus dem durch $U \mapsto -U$, $V \mapsto -V$, gegebenen Körperautomorphismus besteht (vergleiche Beispiel 1.5).

Abbildungsverzeichnis