Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 30

Zu einer konvergenten Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

Die Taylor-Formel

Brook Taylor (1685-1731)

Definition 30.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[1] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 30.2. *(Taylor-Formel) Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

[1]Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Sei x fixiert. In Anlehnung an die zu beweisende Aussage betrachten wir zu $r \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} g_r(u) = f(x) - f(u) - f'(u)\cdot(x-u) - \frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2 - \ldots \\ - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{r}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}, \end{aligned}$$

den wir als Funktion in $u \in I$ auffassen. Es ist $g_r(x) = 0$ und wir wählen r so, dass $g_r(a) = 0$ ist, was möglich ist. Die Funktion $g(u) = g_r(u)$ ist auf dem Teilintervall $[a, x] \subseteq I$ (bzw. $[x, a]$, falls $x < a$ ist) differenzierbar und besitzt an den beiden Intervallgrenzen den Wert 0. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a, x[$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgrund der Produktregel und der Kettenregel ist (Ableitung nach u)

$$\left(\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\right)' = \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1}\,.$$

Daher heben sich in der Ableitung von g die meisten Terme weg und es ergibt sich

$$g'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{r}{n!}(x-u)^n\,.$$

Aus der Gleichung

$$0 \;=\; g'(c) \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{r}{n!}(x-c)^n$$

folgt $r = f^{(n+1)}(c)$. Wenn wir dies und $u = a$ in die Anfangsgleichung einsetzen und $g_r(a) = 0$ ausnutzen, so ergibt sich die Behauptung. □

KOROLLAR 30.3. *(Taylor-Abschätzung) Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B = \sup(|f^{(n+1)}(c)|, c \in I)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{B}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\,.$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 22.7, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 30.2. $\square$

Satz 30.4. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

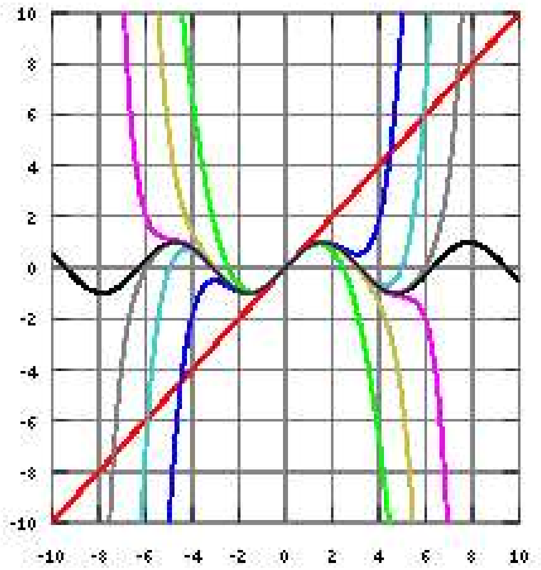
(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. $\square$

Die Taylor-Reihe



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 30.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 30.6. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit einem positivem Konvergenzradius r und*

$$f : U(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt a stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 29.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt a. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in a den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 29.1. □

Beispiel 30.7. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{falls } x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x>0\,.\end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p\in\mathbb{R}[U]$ besitzen und dass davon der Limes für $x\to 0$, $x>0$ stets $=0$ ist (siehe Aufgabe 30.7 und Aufgabe 30.8). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert null und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}}>0$ ist.

Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir beenden diese Vorlesung mit einem Beweis für den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra*. Er wurde erstmals 1799 von Gauß bewiesen.

Satz 30.8. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante Polynom $P\in\mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Es sei $P\in\mathbb{C}[Z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Aufgrund von Korollar 22.9 gibt es ein $z_0\in\mathbb{C}$ mit $\mid P(z)\mid\geq\mid P(z_0)\mid$ für alle $z\in\mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass dieses Betragsminimum 0 ist.Wir nehmen also an, dass $\mid P(z_0)\mid>0$ ist, und müssen dann ein z_1 finden, an dem der Betrag des Polynoms kleiner wird. Durch Verschieben (d.h. indem wir die Situation in der neuen Variablen $z-z_0$ betrachten) können wir annehmen, dass das Minimum an der Stelle 0 angenommen wird, und durch Division durch $P(z_0)$ können wir annehmen, dass das Polynom im Nullpunkt den Wert 1 besitzt. D.h. wir können annehmen, dass ein Polynom

$$P=1+c_kz^k+c_{k+1}z^{k+1}+\ldots+c_dz^d$$

mit $k\geq 1$ und $c_k\neq 0$ vorliegt, das im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt. Wegen Korollar 29.13 gibt es ein $\gamma\in\mathbb{C}$ mit $\gamma^k=-c_k^{-1}$. Wir setzen $z=\gamma w$ (das ist eine Variablenstreckung). In der neuen Variablen w erhalten wir ein Polynom der Form

$$1-w^k+w^{k+1}Q(w)\,,$$

das nach wie vor im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt (hierbei ist $Q(w)\in\mathbb{C}[w]$ ein Polynom). Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $b\in\mathbb{R}_+$ mit $\mid Q(w)\mid\leq b$ für alle $w\in B(0,1)$. Für reelles w mit $0<w<\min(1,b^{-1})$ gilt

$$\begin{aligned}\mid 1-w^k+w^{k+1}Q(w)\mid &\leq \mid 1-w^k\mid+\mid w^{k+1}Q(w)\mid\\ &= 1-w^k+w^{k+1}\mid Q(w)\mid\\ &= 1-w^k(1-w\mid Q(w)\mid)\end{aligned}$$

$$< \quad 1.$$

Wir haben also Stellen gefunden, wo der Betrag des Polynoms einen kleineren Wert annimmt, ein Widerspruch. $\square$

Abbildungsverzeichnis