Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

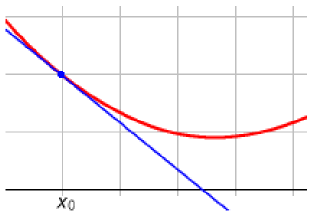
Vorlesung 27

Differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in $\mathbb{K}$ ist.



Definition 27.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

Definition 27.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{K}$. Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 27.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s .$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 27.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a + h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

Satz 27.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a) .$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - s \right) ,$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = r(x) + s\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

KOROLLAR 27.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 27.5. □

LEMMA 27.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

(3) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*

$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$

(4) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*

$$(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

(5) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 27.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s+\tilde{s})(x-a) + (r+\tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 23.6 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 27.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). $\square$

Satz 27.8. *(Kettenregel) Seien*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 27.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (g'(f(a))r(x) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) = g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □

SATZ 27.9. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Seien D und E zwei offene Mengen in $\mathbb{K}$ und sei*

$$f : D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1} : E \longrightarrow D$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von f^{-1} konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a konvergiert. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = (\lim_{n \mapsto \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a})^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

BEISPIEL 27.10. Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$, deren Ableitung $f'(x) = 2x$ ist. Nach Satz 27.9 ist daher

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$, deren Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist. Dies ist für $x \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 27.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Höhere Ableitungen

Definition 27.11. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die Ableitung von f.

Definition 27.12. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f n-mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Abbildungsverzeichnis