**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Mathematik I

## Vorlesung 23

### Grenzwerte von Abbildungen

Wir betrachten die beiden stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1/x,$$

und

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1,$$

die beide nicht im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}$ definiert sind. Offensichtlich kann man $g$ durch die Festlegung $g(0) := 1$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Bei $f$ hingegen ist das nicht möglich: wenn man sich auf der positiven Halbgeraden 0 annähert, wachsen die Funktionswerte gegen $+\infty$, wenn man sich auf der negativen Halbgeraden 0 annähert, so wachsen die Funktionswerte gegen $-\infty$, und somit ist jede Fortsetzung nicht stetig. Diese Beobachtung führt zum Begriff des Grenzwertes einer Abbildung, den wir insbesondere im Rahmen der Differentialrechnung verwenden werden.

Definition 23.1. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Berührpunkt* von $T$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset\,.$$

Definition 23.2. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Menge aller Berührpunkte von $T$ heißt der *Abschluss* von $T$. Er wird mit $\overline{T}$ bezeichnet.

Der Abschluss ist eine abgeschlossene Menge, und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die $T$ umfasst.

Definition 23.3. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von $T$. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum $M$. Dann heißt $b \in M$ der *Grenzwert* von $f$ in $a$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a, \delta)$ ist $f(x) \in U(b, \epsilon)$.

Wenn der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Notation 23.4. In der Situation von Definition wird der Grenzwert, falls er existiert, mit

$$\lim_{x\in T,\, x\to a} f(x) \text{ bzw. mit } \lim_{x\to a} f(x)$$

bezeichnet.

Lemma 23.5. *Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von $T$. Es sei*

$$f : T \longrightarrow M$$

*eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum $M$ und sei $b \in M$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Abbildung $f$ besitzt in $a$ den Grenzwert $b$.*
(2) *Zu jeder offenen Menge $V \subseteq M$ mit $b \in V$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $a \in U$ und mit $f(U \cap T) \subseteq V$.*
(3) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T$, die gegen $a$ konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b$.*

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2). Da $V$ offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U(b,\epsilon) \subseteq V$. Aufgrund von (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(T \cap U(a,\delta)) \subseteq U(b,\epsilon)$ und wir können $U = T \cap U(a,\delta)$ nehmen. (2) $\Rightarrow$ (3). Sei eine gegen $a$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Für die offene Menge $V = U(b,\epsilon)$ gibt es nach (2) eine offene Menge $U$ mit $a \in U$ und $f(U \cap T) \subseteq V$. Wegen der Offenheit von $U$ gibt es auch ein $\delta > 0$ mit $U(a,\delta) \subseteq U$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U(a,\delta)$ für alle $n \geq N$. Für diese $n$ ist dann $f(x_n) \in U(b,\epsilon)$, d.h. die Bildfolge konvergiert. (3) $\Rightarrow$ (1). Nehmen wir an, dass $b$ nicht der Grenzwert ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in T$ gibt mit $x \in U(a,\delta)$ und mit $f(x) \notin U(b,\epsilon)$. Wir wenden diese Eigenschaft auf die Stammbrüche $\delta = 1/n$ , $n \in \mathbb{N}$, an und erhalten eine Folge

$$x_n \in U(a, 1/n) \text{ und } f(x_n) \notin U(b,\epsilon)\,.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen $x$, die Bildfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht gegen $b$, im Widerspruch zu (3). □

Lemma 23.6. *Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von $T$. Es seien $f : T \to \mathbb{K}$ und $g : T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f+g$ besitzt einen Grenzwert in $a$, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in $a$, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(3) *Es sei* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in T$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. *Dann besitzt der Quotient* $f/g$ *einen Grenzwert in* $a$, *und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 23.6. □

Beispiel 23.7. Wir betrachten den Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} ,$$

wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt $1/4$.

## Fortsetzung von stetigen Abbildungen

Definition 23.8. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum $M$ und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq X$. Dann heißt eine Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{T} \longrightarrow M$$

eine *stetige Fortsetzung* von $f$, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in T$.

Satz 23.9. *Es seien* $L$ *und* $M$ *metrische Räume,* $T \subseteq L$ *eine Teilmenge und*

$$f : T \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

*eine stetige Abbildung. Es sei* $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ *und für jedes* $a \in \tilde{T} \setminus T$ *existiere der Grenzwert* $\lim_{x\to a} f(x)$. *Dann ist die durch*

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a)\,, & \textit{falls } a \in T\,, \\ \lim_{x\to a} f(x), & \textit{falls } a \in \tilde{T} \setminus T\,, \end{cases}$$

*definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von $f$ auf $\tilde{T}$.*

*Beweis.* Sei $a \in \tilde{T}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $a$ ein Berührpunkt von $T$ ist und da der Grenzwert von $f$ in $a$ existiert (bei $a \in T$ exisitiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$ für alle $x \in T$, $d(x,a) \leq \delta$. Sei nun $y \in \tilde{T}$ mit $d(y,a) \leq \delta/2$. Es gibt ein $x \in T$ mit $d(x,y) \leq \delta/2$ und mit $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$. Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an $y$ ist $d(x,a) \leq \delta$. Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \,\leq\, d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \,\leq\, \epsilon.$$

□

Satz 23.10. *Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge mit dem Abschluss $\overline{T}$. Es sei*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung*

$$\tilde{f} : \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 23.9 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $T$, die gegen $a$ konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit $d(x,x') \leq \delta$. Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $n_0$ mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \,\leq\, \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen $a$ konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen $a$ konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. □

Korollar 23.11. *Es sei*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 23.10 und aus $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

## Reelle Exponentialfunktionen

Für jede positve reelle Zahl $b$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $b^n$ eine positive reelle Zahl. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_+$ und eine positive reelle Zahl $y$ ist $y^{1/m}$ definiert. Für eine rationale Zahl $q = n/m$ ist daher $b^q = (b^n)^{1/m}$ definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von $q$.

LEMMA 23.12. *Es sei $b$ eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

*folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(2) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist $f$ streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist $f$ streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 23.11. □

LEMMA 23.13. *Es sei $b$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

*auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wir betrachten Intervalle der Form $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \leq m := \max (b^n, b^{-n})$$

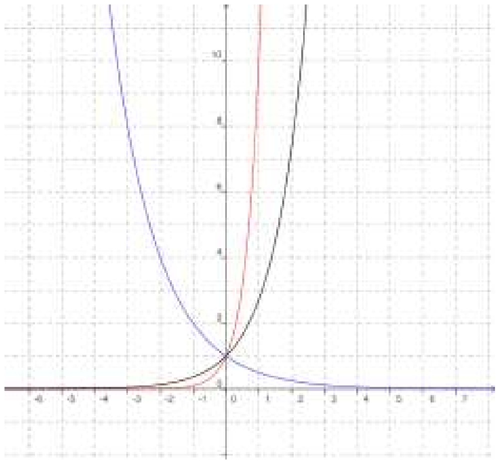
für alle $q \in [-n, n]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(b^{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, daher gibt es insbesondere ein $k$ derart, dass

$$| b^{1/k} - 1 | \leq \epsilon/m$$

ist. Wir setzen $\delta = 1/k$. Dann gilt für zwei beliebige rationale Zahlen $q, q' \in [-n, n]$ mit $| q' - q | \leq \delta$ unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen

$$| b^{q'} - b^q | = | b^{q'}/b^q - 1 | \, b^q \leq | b^{q'-q} - 1 | \, m \leq \epsilon/m \cdot m = \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10$, $\frac{1}{2}$ und $e$.

Aufgrund von Lemma 23.13 und Korollar 23.11 lassen sich die zunächst nur auf $\mathbb{Q}$ definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

DEFINITION 23.14. Sei $b$ eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* $b$.

LEMMA 23.15. *Es sei $b$ eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

*folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist $f$ streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist $f$ streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 23.12. □

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis $b = e$. Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

## Abbildungsverzeichnis