Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 22

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Karl Weierstraß (1815-1897)

Satz 22.1. *(Bolzano-Weierstraß) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 = [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_{k+1} > n_k$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. □

Kompaktheit

Definition 22.2. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 22.3. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann kompakt, wenn jede Folge in T eine in T konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. Wenn T nicht beschränkt ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in T$ mit $d(x_n, 0) \geq n$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. Wenn T nicht abgeschlossen ist, so gibt es nach Satz 19.16 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^m$, $x \notin T$, konvergiert. Jede Teilfolge davon konvergiert ebenfalls gegen x, so dass es keine in T konvergente Teilfolge geben kann.

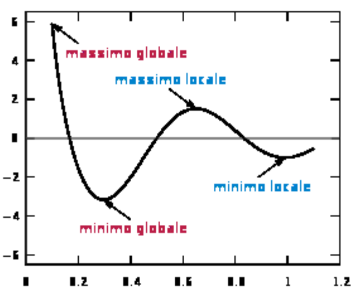
Sei nun T abgeschlossen und beschränkt, und sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ vorgegeben. Für diese Folge ist insbesondere jede Komponentenfolge $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wir betrachten die erste Komponente $i = 1$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass die erste Komponente dieser Folge konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge derart, dass auch die zweite Komponentenfolge konvergiert. Insgesamt erhält man durch dieses Verfahren eine Teilfolge, wo jede Komponentenfolge konvergiert. Nach Lemma 19.13 konvergiert dann die gesamte Teilfolge in $\mathbb{R}^m$. Da T abgeschlossen ist, liegt nach Satz 19.16 der Grenzwert in T. $\square$

Satz 22.4. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung. Dann ist auch das Bild $f(T)$ kompakt.

Beweis. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(T)$ eine Folge, wobei wir $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \in T$ schreiben können. Da T kompakt ist, gibt es nach Satz 22.3 eine konvergente Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert auch die Bildfolge $y_{n_i} = f(x_{n_i})$ gegen $f(x)$. Damit ist eine konvergente Teilfolge gefunden und $f(T)$ ist kompakt nach Satz 22.3. $\square$



Definition 22.5. Sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt},$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch von *globalem Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des lokalen Maximums.

Ein lokales, aber kein globales Maximum der Höhenfunktion
$h : S^2 \to \mathbb{R}$ auf der Erdsphäre S^2.

Definition 22.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in X$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in X$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Satz 22.7. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in T$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in T\,.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Satz 22.4 ist $f(T)$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(T) \leq M$ für eine reelle Zahl M. Wegen $T \neq \emptyset$ besitzt $f(T)$ wegen Satz 8.9 ein Supremum s in $\mathbb{R}$, das wegen der Abgeschlossenheit zu $f(T)$ gehört, also das Maximum von $f(T)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in T$ mit $f(x) = s$. $\square$

Beispiel 22.8. Wir gehen davon aus, dass die Temperatur stetig vom Ort abhängt, d.h. die Temperatur (zu einem bestimmten Zeitpunkt) ist eine stetige Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge ist. Es hängt dann von topologischen Eigenschaften des Gebietes, für das man sich interessiert, ab, ob es einen wärmsten (oder kältesten) Punkt in G gibt. Bei $G = \mathbb{R}^3$ (dem naiven unbeschränkten Weltall) muss es keinen wärmsten Punkt geben, z. B. wenn es eine unendliche Folge von zunehmend heißeren Sonnen gibt. Auf der Erdoberfläche gibt es hingegen einen wärmsten Punkt, da die Erdoberfäche kompakt ist. Das Gleiche gilt für die gesamte Erdkugel einschließlich der Erdoberfläche. Für das Erdinnere, also die Erdkugel ohne die Erdoberfläche, muss es keinen kältesten Punkt geben, da die Erde zum Rand hin zunehmend kälter werden könnte.

Korollar 22.9. *Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{K}$ mit*

$$|\,P(z)\,| \geq |\,P(w)\,|$$

für alle $z \in \mathbb{K}$. D.h. das Minimum des Betrags eines Polynoms wird angenommen.

Beweis. Es sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

(mit $a_n \neq 0$). Wir setzen

$$a = \max\,(|\,a_i\,|, i = 0, \ldots, n-1) \text{ und } r := \max\,(\frac{na + |\,a_0\,| + 1}{|\,a_n\,|}, 1)\,.$$

Bei $n = 0$ ist die Aussage klar, sei also $n \geq 1$. Für z mit $|\,z\,| \geq r$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\,P(z)\,| &\geq |\,a_n z^n\,| - |\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\,| \\ &\geq |\,a_n\,|\,|\,z\,|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |\,a_i\,|\,|\,z\,|^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \; |a_n||z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} a\,|z|^{n-1} \\ &\geq \; |z|^{n-1}\left(|a_n||z| - na\right) \\ &\geq \; |a_0| + 1 \\ &> \; |a_0|\,. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge $B(0,r)$ nimmt die stetige Funktion $z \mapsto | P(z) |$ nach Satz 22.7 ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $w \in B(0,r)$ mit $| P(z) | \geq | P(w) |$ für alle $z \in B(0,r)$. Wegen $| a_0 | = | P(0) | \geq | P(w) |$ und der Überlegung für z mit $| z | \geq r$ ergibt sich, dass im Punkt w überhaupt das Minimum der Funktion angenommen wird. □

Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt das Minimum des Betrags eines nichtkonstanten Polynoms stets den Wert 0 - dies ist der Inhalt des *Fundamentalsatzes der Algebra*, und das vorstehende Lemma ist eine Vorstufe zu seinem Beweis.

Gleichmäßige Stetigkeit

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto 1/x,$$

ist stetig. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\epsilon)$. Dabei hängt das δ nicht nur von der Zielgenauigkeit ϵ, sondern auch von x ab. Je kleiner x wird, desto steiler wird der Funktionsgraph und desto kleiner muss δ gewählt werden, damit das Bild der δ-Umgebung innerhalb der ϵ-Umgebung von $f(x)$ landet. Es gibt natürlich auch Funktionen, bei denen man zu jedem ϵ ein δ findet, dass für alle x die Stetigkeitseigenschaft sichert.

Definition 22.10. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in L$ mit $d(x,x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Satz 22.11. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei*

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum M. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für kein $\delta > 0$ die Beziehung $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\epsilon)$ für alle $x \in T$ erfüllt ist. Insbesondere gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ein Paar $x_n, y_n \in T$ mit $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$, aber mit $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Wegen der Kompaktheit gibt es aufgrund von Satz 22.3 eine Teilfolge $(x_m)_{m \in M}$ (dabei ist $M \subseteq \mathbb{N}$ unendlich) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Die entsprechende Teilfolge $(y_m)_{m\in M}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren die beiden Bildfolgen $(f(x_m))_{m\in M}$ und $(f(y_m))_{m\in M}$ gegen $f(x)$. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da $d(f(x_m), f(y_m)) \geq \epsilon$ ist. $\square$

Abbildungsverzeichnis