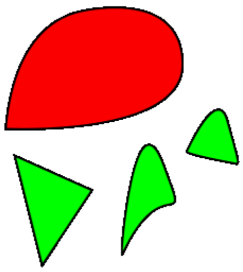
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 21

Die beiden nächsten Vorlesungen kann man unter dem Aspekt sehen, welche *topologischen* Eigenenschaften die reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen auszeichnen und wie sich diese Unterschiede auf stetige Abbildungen auswirken. Bereits in der achten Vorlesung wurde die intuitive Vorstellung, dass die reellen Zahlen ein „Kontinuum“ bilden, durch den Begriff der Vollständigkeit präzisiert, also durch die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Weitere mathematische Präzisierungnen dieser Vorstellung liefern die beiden Begriffe *zusammenhängend* und *kompakt*.

Zusammenhängende Räume



Die rote Menge ist zusammenhängend, die grüne Menge nicht.

Definition 21.1. Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von X gibt (nämlich $\emptyset$ und X selbst), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Den leeren metrischen Raum bezeichnet man gemäß dieser Definition als nicht zusammenhängend (oder *unzusammenhängend*). Ein nichtleerer nicht zusammenhängender Raum X ist dadurch ausgezeichnet, dass man $X = A \cup B$ als disjunkte Vereinigung schreiben kann, wobei A und B beide nichtleer und in X abgeschlossen (und damit auch beide offen) sind.

In der folgenden Aussage verstehen wir unter Intervalle auch die (einseitig oder beidseitig) unbeschränkten Intervalle, wie z.B. $[a, +\infty]$.

Satz 21.2. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist T genau dann zusammenhängend, wenn T ein (nichtleeres) Intervall ist.*

Beweis. Sei zuerst T kein Intervall. Wenn T leer ist, so ist T nach Definition nicht zusammenhängend. Sei also $T \neq \emptyset$, aber kein Intervall. Dann gibt es nach Aufgabe 8.13 $x, z \in T$ und $y \notin T$ mit

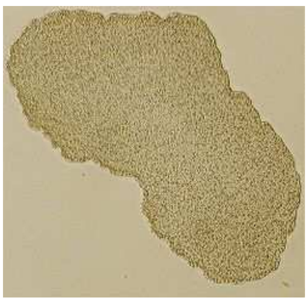
$$x < y < z\,.$$

Dann ist die Menge

$$A = T \cap \,]-\infty, y[\, = T \cap \,]-\infty, y]$$

sowohl offen als auch abgeschlossen in T, da man A sowohl als Durchschnitt von T mit einem offenen Intervall als auch als Durchschnitt mit einem abgeschlossenen Intervall schreiben kann. Wegen $x \in A$ und $z \notin A$ ist sie weder $\emptyset$ noch T, also ist T nicht zusammenhängend. Sei nun T ein nichtleeres Intervall und sei angenommen, dass es eine Teilmenge $A \subseteq T$ mit $A \neq \emptyset, T$ gibt, die in T sowohl offen als auch abgeschlossen sei. Es sei $x \in A$ und $y \in T$, $y \notin A$. Wir betrachten das (abgeschlossene und beschränkte) Intervall $I = [x, y] \subseteq T$ (ohne Einschränkung sei $x < y$) und setzen $A' = A \cap [x, y]$. Dies ist eine in I offene und abgeschlossene Teilmenge von I, die wegen $x \in A'$ nicht leer ist und wegen $y \notin A'$ nicht ganz I ist. D.h. es genügt, die Behauptung für ein abgeschlossenes und beschänktes Intervall $I = [x, y]$ zu zeigen. Wir betrachten die reelle Zahl $s = \sup(A)$, die wegen Satz 8.9 existiert. Da ein abgeschlossenes Intervall vorliegt, gehört s zu I und aufgrund von Korollar 19.17 ist $s \in A$. Da A aber auch offen in I ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $[s - \delta, s + \delta] \cap I \subseteq A$. Da s das Supremum von A ist, folgt $s = y$. Die gleiche Argumentation für $I \setminus A$ ergibt $s \in I \setminus A$, ein Widerspruch. □

Insbesondere sind also die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammenhängend. Dies gilt auch für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und für $\mathbb{R}^n$. Für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt die vorstehende Aussage nicht, dort sind nämlich nur die einpunktigen Intervalle zusammenhängend, alle anderen Intervalle sind in $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend, da es zwischen zwei rationalen Zahlen stets irrationale Zahlen gibt, mit deren Hilfe man Teilmenge definieren kann, die zugleich offen als auch abgeschlossen sind.



Das Tierchen Trichoplax adhaerens hat merkwürdige Zusammenhangseigenschaften. Es ist ein zusammenhängender Vielzeller. Wenn man es durch ein Sieb drückt, so dass die einzelnen Zellen voneinander getrennt werden, entstehen unzusammenhängende Zellen. Diese finden dann aber wieder zueinander und es entsteht erneut ein zusammenhängendes lebendiges Tierchen.

Zusammenhängende Räume und stetige Abbildungen

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist. Wir werden allgemeiner studieren, was mit einer zusammenhängenden Teilmenge unter einer stetigen Abbildung passiert.

Satz 21.3. *Seien L und M metrische Räume und sei*

$$f : L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei $S \subseteq L$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist auch das Bild

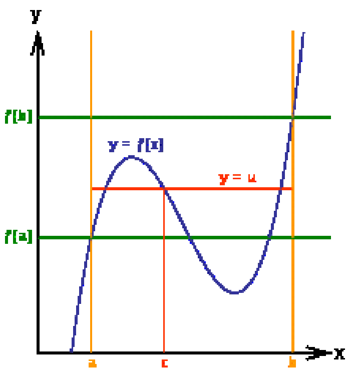
$$f(S)$$

zusammenhängend.

Beweis. Sei $f(S) = T$ und $A \subseteq T$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge, die weder leer noch ganz T sei. Die eingeschränkte Abbildung

$$f : S \longrightarrow T$$

ist ebenfalls stetig, und sie ist auch surjektiv. Daher ist $f^{-1}(A)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge in S, die ebenfalls weder leer noch ganz S ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass S zusammenhängend ist. $\square$



Satz 21.4. *(Zwischenwertsatz) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.*

Beweis. Das Intervall $I = [a, b]$ ist aufgrund von Satz 21.2 zusammenhängend. Wegen Satz 21.3 ist das Bild $f(I)$ ebenfalls zusammenhängend, und erneut wegen Satz 21.3 ist daher $f(I)$ ein Intervall. Da $f(a), f(b) \in f(I)$ sind, und c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, muss auch $c \in f(I)$ sein. D.h. es gibt ein $x \in I$ mit $f(x) = c$. $\square$

Korollar 21.5. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 21.4. $\square$

Beispiel 21.6. Die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt.

Beispiel 21.7. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann besitzt die Funktion aufgrund des Satz 21.4 eine Nullstelle in diesem Intervall. Diese kann man durch eine *Intervallhalbierung* finden. Dazu setzt man $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und betrachtet die Intervallmitte $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Man berechnet

$$f(x_0)\,.$$

Bei $f(x_0) \leq 0$ setzt man

$$a_1 := x_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(x_0) > 0$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := x_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl c ist eine Nullstelle der Funktion: Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq 0$ und das überträgt sich auf den Grenzwert c, und für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq 0$ und das überträgt sich ebenfalls auf c.

Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion

Es ist keineswegs so, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen wieder stetig ist. Für stetige Funktionen auf reellen Intervallen gilt dies aber.

Satz 21.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Satz 21.3 und aus Satz 21.2. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f : I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g = f^{-1}$ und $y = f(x)$ vorgegeben. Es sei y kein Randpunkt von J. Dann ist auch x kein Randpunkt von I. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

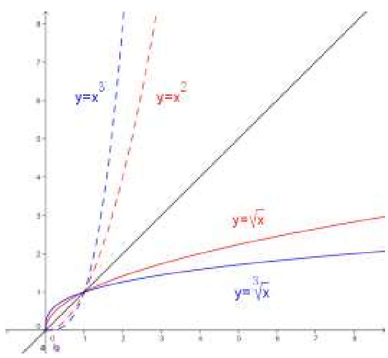
$$\delta := \min\left(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y\right) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt

$$g(y') \in [g(y - \delta), g(y + \delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon] .$$

Also ist g stetig in y. Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I, sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. $\square$

Wurzeln



Satz 21.9. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die Potenzfunktionen wie angegeben surjektiv und die Umkehrfunktionen exisitieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 21.8. $\square$

Abbildungsverzeichnis