Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Zeige, dass die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Beispiel 5.2 eingeführte Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c\,,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass die auf $\mathbb{Z}$ in Beispiel 5.2 eingeführte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Aufgabe 5.3. Definiere auf der in Beispiel 5.2 eingeführten Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine totale Ordnung, die die Ordnung auf den natürlichen Zahlen fortsetzt.

In der folgenden Aufgabe wird eine alternative Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen beschrieben.

Aufgabe 5.4. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_+$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Wir betrachten die zweielementige Menge

$$V = \{+, -\}$$

und die Menge

$$Z = (V \times \mathbb{N}_+) \cup \{0\}\,.$$

Wir wollen Z zu einem Modell für die ganzen Zahlen machen. Als abkürzende Schreibweise verwenden wir n für das Paar $(+, n)$ und $-n$ für das Paar $(-, n)$. Man definiere eine Verknüpfung $\oplus$ auf Z, die für $n, m \in \mathbb{N}_+$ die Eigenschaft

$$n \oplus m = n + m$$

erfüllt und die Z zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element 0 macht.

Aufgabe 5.5. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

AUFGABE 5.6. Zeige, dass die in Beispiel 5.6 auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ eingeführte Relation

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 5.7. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (6) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x - z) + (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

AUFGABE 5.8. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

AUFGABE 5.9. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

AUFGABE 5.10. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Rechne dies explizit für $n \leq 6$ nach.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 5.11. (3 Punkte)

Es sei I eine Menge und M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$\star : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \star y.$$

Definiere auf der Abbildungsmenge

$$\text{Abb}\,(I, M) = \{F : I \to M :\ F \text{ Abbildung}\}$$

eine Verknüpfung unter Bezug auf die vorgegebene Verknüpfung. Übertragen sich die Eigenschaften Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes, Existenz von inversen Elementen?

In der folgenden Aufgabe darf man Gesetzmäßigkeiten auf $\mathbb{N}$ verwenden.

AUFGABE 5.12. (5 Punkte)

Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der in Beispiel 5.2 eingeführten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 5.13. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge, $s \in M$ ein Element und

$$F : M \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ k \longmapsto \varphi(k),$$

gibt, die die Eigenschaften

$$\varphi(0) = s \text{ und } \varphi(k+1) = F(\varphi(k)) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt.

In den beiden folgenden Aufgaben darf man verwenden, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einen kommutativen Ring bilden.

Aufgabe 5.14. (2 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 5.6 definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 5.15. (6 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 5.6 eingeführte Quotientenmenge $\mathbb{Q}$ mit den dort eingeführten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und den Elementen 0 und 1 ein Körper ist.

In der folgenden Aufgabe darf man verwenden, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist.

Aufgabe 5.16. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a,b) : \, a,b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0,0) \text{ und } 1 = (1,0)\,,$$

der Addition

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

und der Multiplikation

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 5.17. (3 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 5.18. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$